ELEMENTI
DI
CALCOLO DIFFERENZIALE
ED INTEGRALE
DI BOUCHARLAT,

DOTTORE NELLE SCIENZE,

MEMBRO DELLA SOCIETA' FILOTECNICA, DI SOCIETA' REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE, DELL' ATENEO DELLE ARTI, E DELLE ACCADEMIE DI ROUEN, DI BORDEAUX, DI NISMES, ecc.

SECONDA EDIZIONE

CONSIDEREVOLMENTE AUMENTATA.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA

DI F. D.

Fatta sopra l' opera uscita da' torchi della Signora Vedova Courcier IN PARIGI NELL' AN. 1820.

NAPOLI
PRESSO VINCENZO ORSINO
1824.
A spese di Giuseppe Russo strada Nilo N.° 15.

L' EDITORE

ALLA STUDIOSA GIOVENTÙ.

Lo scrivere delle buone Istituzioni non è lo stesso che lo scrivere un buon libro. Quanti e quanti scrivono delle buone opere; ma non hanno tutte le qualità, onde scrivere de' buoni elementi pel vantaggio della studiosa Gioventù. Il Signor Boucharlât sembra dotato di tutte le qualità per agevolare colle sue opere matematiche alla studiosa gioventù lo studio delle scienze esatte, divenuto tanto necessario a tutte le professioni, per l' influenza che vi esercita. Egli ha pubblicato finora gli elementi di calcolo differenziale ed integrale, gli elementi di meccanica, e la teoria delle curve, e delle superficie di secondo grado. Queste istituzioni sono preziose per la scelta del metodo, per quella delle dimostrazioni, e per la brevità. Il rapido spaccio che se ne fa, e le continue richieste che giungono a' librai da tutte le parti, giustificano il merito di queste istituzioni. Perciò, onde fare cosa grata alla studiosa gioventù, mi sono impegnato a dare la prima versione italiana di queste opere, per l' eleganza, ed esattezza della quale non ho

risparmiato mezzo. Usciranno prima alla luce gli elementi di calcolo differenziale, ed integrale, che già sono sotto i torchi; seguiranno gli elementi di meccanica analitica; ed indi la teoria delle curve, e delle superficie di secondo grado. Io m' impegno di dare la versione delle rimanenti parti delle matematiche, appena l'autore le pubblicherà.

PREFAZIONE

DELL' AUTORE.

Nella Storia delle conoscenze umane vi sono delle epoche, nelle quali il genio dopo di essersi elevato alle più sublimi astrazioni, sembra arrestarsi per qualche tempo ne' suoi voli, per prendere ben presto nuova forza, e distinguersi con una di quelle scoverte che cambiano la faccia della scienza.

Così Cartesio coll' applicazione dell' Algebra alla Geometria, si aprì una strada ignota a' suoi Predecessori, e Newton e Leibnitz riempirono di maraviglia la dotta Europa coll' invenzione di un' analisi superiore ancora alla Geometria di Cartesio.

Non vi fu giammai scoverta che onorasse più lo spirito umano: l' infinito, questo essere ideale, parve sottomesso al calcolo, ed operar de' prodigii. Invano qualche Filosofo cercò di sparger de' dubii sull' esattezza di un' analisi così singolare: essi non poterono contrastarne i risultamenti, e non fecero ch' eccitare i geometri a meditar di vantaggio sulla vera metafisica de' nuovi calcoli. Newton, il primo, penetrò questo mistero, considerando il calcolo differenziale, come il metodo delle prime ed ultime ragioni delle quantità, o altrimenti, come il metodo de' limiti del loro rapporto. D' Alembert presentò le idee di Newton, come racchiudendo la vera metafisica del Calcolo differenziale, e dimostrò che col metodo de' limiti si può dare una spiegazione soddisfacente di quello delle flussioni degl' Inglesi, ponendo da banda ogni considerazione di movimento, idea straniera al Calcolo differenziale. Posteriormente a D' Alembert, molti Geometri, e tra gli altri Cousin, hanno esposto ne' loro scritti il metodo de' limiti; ma questo non ha ricevuta tutta la sua chiarezza, che dopo di essere stato dimostrato per mezzo del teorema di Taylor: fu allora,

che si dissiparono interamente i dubbii che poteano nascere della metafisica speciosa del metodo degl' infinitamente piccoli, metodo che può essere riguardato, come una specie di abbreviamento di quello de' limiti.

Il metodo degl' infinitamente piccioli non è più, sotto questo rapporto, che un mezzo più spedito per trovare i differenziali delle diverse funzioni: esso imprime questi differenziali nella nostra memoria, per mezzo di figure geometriche ridotte all' ultimo grado di semplicita, e che parlano all' imaginazione più delle idee astratte.

Questo metodo infine diviene indispensabile nelle alte parti della Meccanica, e dell' Astronomia, nella quale, senza il suo soccorso, la risoluzione de' problemi diverrebbe sovente di un' estrema complicazione; perciò i nostri grandi geometri ne fanno sovente uso nelle parti più sublimi de' loro scritti.

Questo metodo ebbe altre volte ardenti difensori, nella sua stessa metafisica, poicchè, se non si abbandona una certa serie di proposizioni, sembra di avere in tutto il rigore matematico, e di dipendere naturalmente da un principio fondamentale.

Questo principio è stato riguardato finora come una specie di assioma: ma il punto di veduta, sotto il quale esso ci fa considerare l' infinito, presentandoci delle conseguenze difficili ad essere ammesse, io ho creduto doverlo dimostrare, dando per base al metodo degl' infinitamente piccoli, un altro principio, il quale fondato egualmente sulle nozioni che noi abbiamo dell' infinito, soddisfa più alla ragione, coll' idea de' limiti, che tacitamente racchiude.

Se il metodo de' limiti rende esatto quello degl' infinitamente piccoli, rettificando ciocchè può esservi di difettoso in quest' ultimo, quello di Lagrange nulla più lascia a desiderare al metodo de' limiti, con far dipendere i coefficienti differenziali dall' Algebra pura.

Questi tre metodi possono dunque considerarsi, per così dire, come facendo parte di un solo: perciò pa-

ragonandoli , si riconosce che i principii , i quali ne derivano , loro sono comuni , e che per comprenderli tutti , non bisogna che aggiugnere poche cose a quello de' limiti . Il metodo di Lagrange riducesi allora in certo modo ad un teorema , che io ho renduto estremamente facile con delle modificazioni , che ho fatto nella sua dimostrazione.

Io non mi sono meno occupato a presentare sotto un aspetto favorevole le diverse teorie , di cui si compone questo Trattato. Come nelle mie altre opere Matematiche , vi ho sviluppato tutte le operazioni , persuaso che non consiste nel supprimerle , che un Autore può dare un' idea più vantaggiosa dalla profondità delle sue conoscenze ; e ch' esso non dee esser giudicato , che dalla maniera colla quale espone le sue idee , e dalle vedute più o meno nuove sparse ne' suoi scritti.

A queste considerazioni io aggiugnerò , che , da che un autore si assoggetta così a non omettere veruna idea intermedia , a forza di precisione si possono solamente evitare le lungherie tanto nocive all' insieme di una teoria ; e la difficoltà diviene più grande ancora , quando una parte dell' opera è destinata a render ragione delle cose.

Dalla moltitudine delle teoriche trattate in quest' opera , si giudicherà ancora meglio degli ostacoli che io ho dovuto incontrare , dopo di essermi assoggettato a queste leggi. Tra le addizioni , che io ho fatto a questa nuova edizione , citerò i Punti singolari ; i Massimi e Minimi delle funzioni di due variabili , le Curve Polari , la Teorica della Variabile indipendente , le Soluzioni particolari dell' equazioni differenziali , la Cubatura de' corpi terminati da superficie curve , e la quadratura di queste superficie ; le condizioni d' integrabilità delle funzioni di tre variabili , l' Equazioni differenziali di second' ordine , l' Equazioni simultanee ecc. ; infine ho terminato quest' opera con una teorica dell' equazioni differenziali parziali , facendo qualche considerazione generale sulle funzioni arbitrarie , che

rendono compiut' i loro integrali. Ciò mi ha portato a dare la dimostrazione di un metodo, di cui si fa uso per determinare la funzione arbitraria, ch' entra in una equazione, allorchè son date l' equazioni di condizione.

La maniera colla quale, considerando le superficie curve, ho trattata questa quistione importante, è analoga a quella che ho impiegato rispetto alle costanti arbitrarie. Perciò coll' ajuto delle curve ho dimostrato, come un' equazione, essendo differenziata, e poi integrata, si può trovare la stessa costante, che la differenziazione avea fatto sparire, quistione, la quale, a mia conoscenza, non era stata ancora discussa.

*Il Calcolo differenziale, e l' Integrale, essendo, più di ogni altra parte delle matematiche, composto di una moltitudine di teoriche, che sono sovente indipendenti le une dalle altre, ho creduto dover indicare con caratteri più piccoli * le cose che possono essere trascurate nella prima lettura. Perciò quelli che vogliono fare uno studio poco profondo dell' alta Geometria, potranno consultare le sole parti più elementari di quest' Opera, mentre che quelli che desiderano acquistare delle conoscenze più estese, dopo di essersi famigliarizzati co' principii, percorreranno con più frutto le altre parti.*

---

* Tutto ciò che nell' originale è scritto con caratteri più piccoli, qui sarà distinto dal segno ** posto innanzi al paragrafo.

ELEMENTI
DI CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

CALCOLO DIFFERENZIALE.

Della differenziazione delle quantità Algebriche.

1. Una variabile dicesi funzione di un' altra, allorchè la prima è eguale ad una certa espressione analitica della seconda; per esempio y è funzione di x nelle seguenti equazioni

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\,,\ y=x^3-3bx^2\,,\ y=\frac{x^2}{a}\,,\ y=b+cx^3.$$

2. Consideriamo una funzione nel suo stato di accrescimento, in virtù di quello della variabile, ch' essa racchiude: ogni funzione di una variabile x potendo esser rappresentata dall' ordinata di una curva RMM' fig. 1, siano dunque $AP=x$, e $PM=y$ le coordinate di un punto M di questa curva, e supponiamo, che l' ascissa AP riceva un accrescimento $PP'=h$; l' ordinata PM diverrà $P'M'=y'$. Per ottenere il valore di questa nuova ordinata, si vede dunque, che bisogna cambiare x in $x+h$ nell' equazione della curva, el valore che allora questa equazione determinerà per y, sarà quello di y'. Fig. 1.

Per esempio se si avesse l' equazione $y=mx^2$, si avrebbe y' cambiando x in $x+h$, il che darebbe

$$y'=mx^2+2mxh+mh^2$$

3. Prendiamo ora l' equazione

$$y=x^3\ \dots\ (1)$$

e supponiamo che y divenga y', allorchè x diviene $x+h$; si avrà

$$y'=(x+h)^3$$

e sviluppando,

$$y'=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3:$$

Se da questa equazione ne togliamo l'altra (1), resterà

$$y'-y=3x^2h+3xh^2+h^3;$$

e dividendo per h, si avrà

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2+3xh+h^2 \ldots (2)$$

Vediamo qual conseguenza possiamo dedurre da ciò: $y'-y$ rappresenta l'accrescimento della funzione y in virtù del aumento h dato ad x; poichè la differenza $y'-y$ è quella del nuovo stato della grandezza di y rispetto al suo stato primitivo.

Da un'altra parte l'accrescimento di x essendo h, ne segue che l'espressione $\frac{y'-y}{h}$, è il rapporto dell'accrescimento della funzione y a quello della variabile x. Esaminando il secondo membro dell'equazione (2), si vede che questo rapporto tanto più diminuisce, quanto più diminuisce h, e che, allorchè h diviene nullo, esso si riduce a $3x^2$.

Il termine $3x^2$ è dunque il limite del rapporto $\frac{y'-y}{h}$; a questo termine esso sempre più si avvicina a proporzione che si fa diminuire h.

4. Nell'ipotesi di $h=o$, divenendo ancor nullo l'accrescimento di y, il rapporto $\frac{y'-y}{h}$ si riduce a $\frac{o}{o}$, e per conseguenza l'equazione (2) diviene

$$\frac{o}{o}=3x^2 \ldots (3)$$

Questa equazione non ha niente di assurdo, poichè l'algebra c' insegna che $\frac{0}{0}$ può rappresentare ogni sorta di quantità. D' altronde è noto che dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero, questa non cambia di valore; ne segue perciò che la picciolezza de' termini di una frazione non influisce per nulla sul suo valore, e che perciò essa può restare la stessa, allorchè i suoi termini sono giunti all' ultimo grado di piccolezza, cioè allorchè sono divenuti nulli.

La frazione $\frac{0}{0}$ che si trova nell' equazione (3) è un simbolo che ha rimpiazzato il rapporto dell' accrescimento della funzione a quello della variabile: come questo simbolo non lascia alcun segno di questa variabile, rappresentiamolo con $\frac{dy}{dx}$; allora $\frac{dy}{dx}$ ci farà conoscere che la funzione era y, e la variabile x. Ma dy e dx saranno parimente riputate per nulle, e noi avremo

$$\frac{dy}{dx}=3x^2 \ldots \quad (4):$$

$\frac{dy}{dx}$, o piuttosto il suo valore $3x^2$ è il coefficiente differenziale della funzione y.

5. Osserviamo, ch' essendo $\frac{dy}{dx}$ il segno che rappresenta il limite $3x^2$ (come lo mostra l' equazione (4)), dx, dee esser sempre situato sotto dy. Intanto per facilitare le operazioni dell' Algebra, si può momentaneamente fare svanire il denominatore dell' equazione (4), e si avrà $dy=3x^2dx$. L' espressione $3x^2dx$ è il differenziale della funzione y.

6. Cerchiamo ancora il differenziale della funzione

$a+3x^2$. A tal oggetto, bisogna fare $x=x+h$ nell' equazione $y=a+3x^2$; cambiando y in y' questa equazione diverrà

$$y'=a+3x^2+6xh+3h^2;$$

dunque $\frac{y'-y}{h}=6x+3h$; eguagliando h a zero, ne risulta

$$\frac{dy}{dx}=6x:$$

Dunque il differenziale cercato è $dy=6xdx$.

7. Per terzo esempio, cerchiamo il differenziale di $y=ax^3-b^3$; facciasi $x=x+h$; sostituendo avremo

$$y'=ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3-b^3;$$

dunque sarà

$$\frac{y'-y}{h}=3ax^2+3axh+ah^2;$$

passando al limite si avrà

$$\frac{dy}{dx}=3ax^2$$

Questo è il coefficiente differenziale della funzione proposta; il differenziale sarà

$$dy=3ax^2dx.$$

8. Proponiamoci di trovare ancora il differenziale di $y=\frac{1-x^3}{1-x}$; facendo la divisione, si trova $1+x+x^2$; mettendo $x+h$ in luogo di x, ed y' in vece di y, si ottiene

$$y'=1+x+h+x^2+2hx+h^2;$$

ed ordinando per rapporto ad h

$$y'=1+x+x^2+(2x+1)h+h^2;$$

dunque sarà

$$\frac{y'-y}{h}=2x+1+h\,;$$

passando al limite si ha $\frac{dy}{dx}=2x+1$; dunque il differenziale di $\frac{1-x^3}{1-x}$ è $(2x+1)dx$.

9. Prendiamo ancora per esempio

$$y=(x^2-2a^2)(x^2-3a^2)\,;$$

sviluppando si ha

$$y=x^4-5a^2x^2+6a^4\,;$$

sostituendo $x+h$ ad x, ed y' ad y, ed ordinando in seguito rispetto ad h, ne viene

$$y'=x^4-5a^2x^2+6a^4+(4x^3-10a^2x)h$$
$$+(6x^2-5a^2)h^2+4xh^3+h^4;$$

dunque sarà

$$\frac{y'-y}{h}=4x^3-10a^2x+(6x^2-5a^2)h+4xh^2+h^3\,;$$

passando al limite si ha

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-10a^2x\,;$$

e moltiplicando per dx, si trova che il differenziale è

$$dy=(4x^3-10a^2x)dx\,.$$

10. L' espressione dx è essa stessa il differenziale di x; poichè sia $y=x$, si ha $y'=x+h$; dunque $y'-y=h$, e passando al limite, dopo di aver diviso per h, si trova $\frac{dy}{dx}=1$; dunque $dy=dx$.

Nello stesso modo si troverebbe che il differenziale di ax è adx.

11. Bisogna osservare, che qualchevolta l'accrescimento della variabile è negativo: in questo caso basta di sostituire $x-h$ ad x, ed operare, come precedentemente si è fatto.

Così per trovare il differenziale di ax^3, quando l'accrescimento è negativo, si sostituirà $x-h$ ad x, e si avrà

$$y'=ax^3-3ax^2h+3axh^2-ah^3;$$

e perciò

$$\frac{y'-y}{h}=-3ax^2+3axh-ah^2;$$

passando al limite si avrà $\frac{dy}{dx}=-3ax^2$, e perciò $dy=-3ax^2dx$. Si vede che si ha lo stesso risultamento, con supporre dx negativo nel differenziale di y calcolato nell'ipotesi di un accrescimento positivo.

12. Prima d'innoltrarci di più, facciamo un'osservazione essenziale, ed è che se in una equazione della forma $y=fx$ (cioè $y=$ funzione di x) si cambia x in $x+h$, e che dopo di aver ordinato per le potenze di h, si trova lo sviluppo seguente

$$y'=A+Bh+Ch^2+Dh^3+ \text{ecc.},$$

si ha sempre $y=A$. Infatti, se si fa $h=o$, il secondo membro si riduce ad A: riguardo al primo, como noi non abbiamo segnato con un accento y, se non per indicare che y subiva un certo cambiamento, allorchè x diveniva $x+h$; bisognerà che supprimiamo l'accento di y, allorchè h sarà nullo, per cui l'equazione si ridurrà ad

$$y=A.$$

13. Da ciò noi ne dedurremo il modo di rendere generale il metodo della differenziazione. Infatti se nell'equazione $y=fx$, nella quale si è supposta nota l'espressione rappresentata da fx, siasi sostituito $x+h$ ad

x, e che dopo di aver ordinato per rapporto alle potenze di h, si sia ottenuto lo sviluppo seguente

$$y = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$$

o piuttosto, dietro ciò che si è detto nell' articolo precedente

$$y' = y + Bh + Ch^2 + \text{ ecc.},$$

si avrà, togliendo da questa l'equazione primitiva

$$y' - y = Bh + Ch^2 + \text{ ecc.}$$

e perciò

$$\frac{y'-y}{h} = B + Ch + \text{ ecc.},$$

e passando al limite $\frac{dy}{dx} = B$. Dal che ne conchiudiamo, che il coefficiente differenziale è eguale al coefficiente del termine che contiene la prima potenza di h nello sviluppo di $f(x+h)$ ordinato per rapporto alle potenze ascendenti di h.

14. Se in luogo di una funzione y, che cresce in virtù di un accrescimento dato alla variabile x, noi avremo due funzioni differenti, che rappresenteremo con y, e z; sostituendo in esse $x+h$ ad x, diverranno y' e z'; ordinando in seguito per rispetto ad h, potremo supporre,

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \text{ ecc. } \ldots (5)$$
$$z' = z + A'h + B'h^2 + \text{ ecc. } \ldots (6);$$

passando al limite si trova

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = A' \ldots. (7);$$

in seguito moltiplicando l'equazioni (5) e (6) l'una per l'altra avremo

$$\begin{aligned} z'y' = zy &+ Azh + Bzh^2 + \text{ ecc.} \\ &+ A'yh + AA'h^2 + \text{ ecc.} \\ &\quad + B'yh^2 + \text{ ecc.}; \end{aligned}$$

E perciò

$$\frac{z'y'-zy}{h}=Az+A'y+(Bz+AA'+B'y)h+\text{ ecc.};$$

e passando al limite

$$\frac{d.zy}{dx}=Az+A'y;$$

mettendo in vece di A ed A' i loro valori dati dall' equazioni (7), ne verrà

$$\frac{dzy}{dx}=\frac{zdy}{dx}+\frac{ydz}{dx};$$

e togliendo il divisore comune dx si avrà

$$d.zy=zdy+ydz$$

Sicchè per avere il differenziale di un prodotto di due variabili, bisogna moltiplicare ciascheduna di esse pel differenziale dell' altra, e sommare i prodotti.

15. Per mezzo di questa regola, si troverà facilmente il differenziale di un prodotto di tre variabili. Sia, per esempio yzu: facciamo $yz=t$, avremo $dyzu=d.tu$. Or da ciocchè precede si ha

$$d.tu=tdu+udt\ldots\ (8);$$

e poicchè $t=yz$, si ha $dt=ydz+zdy$; mettendo dunque questi valori di t e di dt nell' equazione (8), essa si cambierà in

$$d.yzu=yzdu+uydz+uzdy.$$

Si vede che la stessa regola sussiste ancora pel prodotto di tre variabili, cioè che *bisogna scrivere il prodotto yzu, e rimpiazzare successivamente ciascuna variabile per mezzo del suo differenziale, e sommare questi prodotti.*

16. La stessa regola ha luogo per un maggior numero di variabili.

17. Abbiamo veduto, art. 10, che il differenziale di ax era adx; dunque allorchè in un prodotto vi è una

costante, basta di prenderne il differenziale, come se la costante non vi fosse, e moltiplicare in seguito per la costante medesima.

Per esempio, si troverebbe che il differenziale di axy è $axdy+aydx$.

18. Il differenziale di una costante è o; poichè sia $y=ax+b$; operando come nell' art. 7, si trova $dy=adx$, e questo risultamento è lo stesso, che se non vi fosse stato affatto costante.

19. Il differenziale di una frazione $\frac{x}{y}$ è $\frac{ydx-xdy}{y^2}$; poicchè supponiamo $\frac{x}{y}=z$, avremo $x=yz$; dunque, art. 14, $dx=ydz+zdy$, da cui ne tiriamo $ydz=dx-zdy$: mettendo il valore di z nel secondo membro, ne verrà $ydz=dx-\frac{x}{y}dy$; riducendo allo stesso denominatore, ne verrà $dz=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, cioè $d\frac{x}{y}=\frac{ydx-xdy}{y^2}$.

20. Se nell' equazione $dyzu=yzdu+yudz+zudy$, art. 15, si dividano tutt' i termini per yzu, si otterrà

$$\frac{d.yzu}{yzu}=\frac{du}{u}+\frac{dz}{z}+\frac{dy}{y}.$$

In generale dividendo il differenziale del prodotto di un numero qualunque di variabili per lo stesso prodotto, si troverà

$$\frac{dxyztu \text{ ec.}}{xyztu \text{ ec.}}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}+\frac{du}{u} \text{ ecc. } (9).$$

Se y, z, t, u, ecc. sono eguali ad x ed in numero m, si avrà nel secondo membro di questa equazione un numero m di termini eguali a $\frac{dx}{x}$; questo secondo membro si cambierà dunque in $\frac{mdx}{x}$, e l' e-

e facendo passare il divisore x ad esponente, si avrà

$$dy = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx$$

e questa espressione è la stessa di quella che si sarebbe avuta, prendendo il differenziale di $y = x^{\frac{p}{q}}$ per mezzo della regola n.° 21.

Per dimostrare il caso, in cui l'esponente è negativo, sia $y = x^{-p}$, cioè $y = \frac{1}{x^p}$; differenziando colla regola delle frazioni art. 21, avremo.

$$dy = \frac{x^p d1 - 1 dx^p}{x^p . x^p}.$$

Osservando, che l'unità, come grandezza costante, non ha differenziale, questa espressione riducesi a

$$dy = -\frac{dx^p}{x^{2p}};$$

effettuando la differenziazione indicata art. 21, si avrà

$$dy = \frac{-px^{p-1}\,dx}{x^{2p}} = -px^{p-1-2p}\,dx = -px^{-p-1}dx,$$

come si sarebbe anche avuto, facendo uso della regola n.° 21.

23. Se i radicali s'indichino con esponenti fratti, la regola del n.° 21 potrà servire a differenziare le quantità irrazionali. Per esempio, per trovare il differenziale di $\sqrt{x}$, si scriverà $x^{\frac{1}{2}}$, il cui differenziale sarà $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, il che c'insegna, che *per avere il differenziale della radice quadrata di una quantità variabile, bisogna dividere il differenziale di questa quantità pel doppio del radicale.*

24. Qualche volta la funzione y, e la variabile x

non sono dati da una stessa equazione Per esempio, se si avessero l'equazioni $y=fu$, ed $u=\varphi x$, il primo mezzo, che si presenterebbe, per ottenere il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, sarebbe quello di eliminare u tra queste due equazioni, onde potervi applicare il metodo della differenziazione; ma senza ricorrere a questa operazione preliminare, si può ottenere immediatamente il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, come apparirà dalla seguente dimostrazione.

Supponiamo che nell' equazione $u=\varphi x$ mettasi $x+h$ in luogo di x, e che allora u diverga $u+k$, e che di più, sostituendo $u+k$ ad u nell' equazione $y=fu$, la funzione y divenga y'; se si sviluppino le funzioni di u e di x per rispetto alle potenze de' loro accrescimenti, la sostituzione di $x+h$ in vece di x nella funzione u, ci darà $u'=u+qh+q'h^2+q''h^3+$ ecc.;

E la sostituzione di $u+k$ in luogo di u nella funzione y, ci darà

$$y'=y+pk+p'k^2+p''k^3+ \text{ ecc.};$$

dunque

$$\left.\begin{aligned} \frac{u'-u}{h}&=q+q'h+q''h^2+ \text{ ecc.} \\ \frac{y'-y}{k}&=p+p'k+p''k^2+ \text{ ecc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (10)$$

Moltiplicando queste equazioni termine a termine si avrà

$$\frac{y'-y}{k} \cdot \frac{u'-u}{h} = (p+p'k+p''k^2+\text{ecc.})(q+q'h+q''h^2+\text{ecc.}).$$

Il primo membro di questa equazione può ridursi; poichè l' accrescimento di u essendo rappresentato da k, è eguale ad $u'-u$; per conseguenza si avrà

$$\frac{y'-y}{k}\cdot\frac{u'-u}{h}=\frac{y'-y}{h}\cdot\frac{u'-u}{k}=\frac{y'-y}{h}\cdot 1=\frac{y'-y}{h};$$

e mettendo $x'-x$ in luogo di h, l'equazione precedente diverrà

$$\frac{y'-y}{x'-x}=(q+q'h+q''h^2+\text{cc.})(p+p'k+p''k^2+\text{ecc.})\dots(11).$$

Allorchè h è zero, k parimente svanisce (poichè u non ha acquistato l'accrescimento k, se non perchè x è divenuto $x+h$) ; per conseguenza nel caso di $h=o$, ch'è quello del limite, l'equazione (11) si cambia in

$$\frac{dy}{dx}=pq\dots(12)$$

Per determinare p e q, bisogna supporre h e k nulli nell'equazioni (10), e queste daranno

$$\frac{dy}{du}=p,\ \frac{du}{dx}=q.$$

Sostituendo questi valori di p e q nell'equazione (12), si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\dots\dots(13)$$

Questo risultamento c'insegna, che se si hanno due equazioni $y=fu$, ed $u=\varphi x$, e che da esse si tirino i valori de' coefficienti differenziali $\frac{dy}{du}$, e $\frac{du}{dx}$, basterà moltiplicare tra di loro questi valori per aver quello di $\frac{dy}{dx}$.

25. Per esempio, se si hanno l'equazioni $y=3u^2$, ed $u=x^3+ax^2$, si troverà

$$\frac{dy}{du}=6u,\ \frac{du}{dx}=3x^2+2ax;$$

E perciò, moltiplicando quest' equazioni termine a termine si avrà

$$\frac{dy}{dx}=6u(3x^2+2ax)=6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax).$$

26 La formola (13) è di grande uso per differenziare espressioni complicate; diamone qualche esempio:

1.° Cerchisi il differenziale di $y=\sqrt{a^2+x^2}$; questa ricerca riducesi a trovare il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$. A tal oggetto, facciamo $a^2+x^2=u$, si avrà $=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$; e l'equazioni $y=fu$, $u=\varphi x$, art. 24, sono quí rappresentate pe: $y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=a^2+x^2$.
Differenziando quest'equazioni, art. 21, si trova

$$\frac{dy}{du}=\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}};\ \frac{du}{dx}=2x;$$

moltiplicando questi coefficienti differenziali, si ha

$$\frac{dy}{dx}=x(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

Sia ancora $y=(a+bx^m)^n$; per trovare il differenziale, facciamo $(a+bx^m)=u$; avremo l'equazioni $y=u^n$, $u=a+bx^m$: dunque $\frac{dy}{du}=nu^{n-1}=n(a+bx^m)^{n-1}$; $\frac{du}{dx}bmx^{m-1}$: moltiplicando tra di loro questi coefficienti differenziali, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=bmnx^{m-1}(a+bx^m)^{n-1}.$$

27. Per terzo esempio sia

$$y=a+\sqrt{(b-\frac{c}{x^2})}.$$

Supponiamo $b-\frac{c}{x^2}=u$ ... (14);

dunque $y=(a+\sqrt{u})^4$ ... (15).

Differenziando l' equazione (14), avremo

$$du=\frac{2cx dx}{x^4};$$

dunque

$$\frac{du}{dx}=\frac{2cx}{x^4}=\frac{2c}{x^3}:$$

L' equazione (15) da

$$dy=4(a+\sqrt{u})^3 d(a+\sqrt{u})=4(a+\sqrt{u})^3\frac{du}{2\sqrt{u}};$$

e mettendo per u il suo valore, si avrà

$$\frac{dy}{du}=\frac{2\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{\left(b-\frac{c}{x^2}\right)}};$$

moltiplicando questi coefficienti differenziali, si ha in fine

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{4c}{x^3}\left[a+\sqrt{\left(b-\frac{c}{x^2}\right)}\right]^3}{\sqrt{\left(b-\frac{c}{x^2}\right)}};$$

Si potrebbe ancora prendere per esempio

$y=(a+\sqrt{x})^3$, e si troverebbe

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(a+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}.$$

28. Occorre spesso differenziare la somma di più funzioni di una variabile; benchè, da ciocchè precede, è evidente che questo differenziale è eguale alla som-

ma de' differenziali di queste funzioni ; pure non trascureremo di dimostrare questo teorema.

Sia dunque

$$y=fx+Fx+\varphi x\,;$$

mettendo $x+h$ in luogo di x in queste funzioni, si avrà

$$y=fx+Ah+A'h^2+\text{ecc.}+Fx+Bh+B'h^2+\text{ec.}$$
$$+\varphi x+Ch+C'h^2+\text{ec.}\,;$$

dunque

$$y'-y=(A+B+C)h+(A'+B'+C')h^2+\text{ec.}\,;$$

passando al limite, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=A+B+C\,,\ \text{e}\ dy=Adx+Bdx+Cdx\,.$$

Or A,B,C essendo i termini moltiplicati per le prime potenze di h negli sviluppi di $f(x+h)$ di $F(x+h)$ e di $\varphi(x+h)$, ne segue che $Adx+Bdx+Cdx$ rappresenteranno la somma de' differenziali delle proposte funzioni.

29. Termineremo ciocchè precede con una osservazione, ed è che l'espressioni, le quali differiscono per soli termini costanti, hanno lo stesso differenziale.

Così $mx+nx^2+a^2$, ed $mx+nx^2+ac-bd$ hanno lo stesso differenziale: ciò è evidente, poichè il differenziale di ogni termine costante è eguale a zero.

De' differenziali successivi.

30. Sia y una funzione di x, differenziandola, troveremo un risultamento della forma pdx(p essendo una quantità, che può contenere la variabile x). Se p contiene x, si potrà differenziare anche p, ed avremo un risultamento della forma qdx; operando nello stesso modo per rispetto a q, si troverà un risultamento della forma rdx; perciò pdx, qdx, rdx ec. sono differenziali

successivi di y. Per esempio, sia $y=ax^3$, si troverà $dy=3ax^2dx$; dunque sarà $p=3ax^2$: Differenziando di nuovo, si ha $dp=6axdx$; dunque si avrà $q=6ax$; e differenziando ancora, si avrà $dq=6adx$, e perciò $r=6a$. Ulteriormente non può più aver luogo la differenziazione, poichè $6a$ è una costante.

L' equazioni $dy=pdx$, $dp=qdx$, $dq=rdx$, dividendo per dx, danno rispettivamente

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{dp}{dx}=q,\quad \frac{dq}{dx}=r.$$

Dopo di aver ottenuto q per mezzo di due differenziazioni successive, dividendo in ogni volta per dx, rappresenteremo questa operazione con $\frac{d^2y}{dx^2}$, ed avremo $\frac{d^2y}{dx^2}=q$; similmente differenziando di nuovo, e dividendo per dx, avremo $\frac{d^3y}{dx^3}$; e così in seguito.

dy è il primo differenziale di y
d^2y n' è il differenziale secondo
d^3y n' è il terzo differenziale; e così in seguito.

Teorema di Maclaurin.

31. Sia y una funzione di x; ordiniamola per rispetto ad x, e supponiamo

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ecc.} \ldots \quad (16);$$

differenziando, ed ordinando per x, si troverà

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{ec.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2C+2.3Dx+3.4Ex^2+\text{ec.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2.3D+2.3.4Ex+\text{ec.}$$

ecc.

Rappresentisi con (y) ciocchè diviene y, allorchè $x=o$;

con $(\frac{dy}{dx})$ ciocchè diviene $\frac{dy}{dx}$, quando $x=o$

con $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ciocchè diviene $\frac{d^2y}{dx^2}$, quando $x=o$,

e così in appresso; l'equazioni precedenti daranno

$$(y)=A,\ (\frac{dy}{dx})=B,\ (\frac{d^2y}{dx^2})=2C,\ (\frac{d^3y}{dx^3})=2.3D,$$

dalle quali ne dedurremo

$$A=(y),\ B=(\frac{dy}{dx}),\ C=\tfrac{1}{2}(\frac{d^2y}{dx^2}),\ D=\frac{1}{2.3}\ \frac{d^3y}{dx^3};$$

sostituendo questi valori nell'equazione (16), essa diverrà

$$y=(y)+(\frac{dy}{dx})x+\tfrac{1}{2}(\frac{d^2y}{dx^2})x^2+\frac{1}{2.3}(\frac{d^3y}{dx^3})x^3\ldots(17):$$

Questa è la formula di Maclaurin

32. Per prima applicazione, prendiamo $y=\frac{1}{a+x}$; differenziando troveremo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(a+x)^2};$$

differenziando di nuovo, troveremo successivamente

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{(a+x)^3},\ \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2.3}{(a+x)^4};$$

dunque facendo $x=o$ ne' valori di y, di $\frac{dy}{dx}$ di $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. troveremo

$$(y)=\frac{1}{a},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{1}{a^2},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{2}{a^3},\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=-\frac{2.3}{a^4};$$

sostituendo questi valori nella formula (17), si otterrà

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{ecc.}$$

33. Per seconda applicazione prendiamo

$y=\sqrt{a^2+bx}=(a^2+bx)^{\frac{1}{2}}$; si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}b(a^2+bx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{b}{2\sqrt{a^2+bx}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b^2(a^2+bx)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}b^2}{\sqrt{(a^2+bx)^3}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3(a^2+bx)^{-\frac{5}{2}}=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3}{\sqrt{(a^2+bx)^5}},$$

Se noi facciamo $x=o$, questi valori diverranno

$$(y)=(a^2)^{\frac{1}{2}}=a;\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2}\frac{b}{a};=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b^2}{a^3};$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3}{a^5};$$

Sostituendo nella formula (17) questi valori di (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ecc. si troverà

$$\sqrt{a^2+bx}=a+\frac{bx}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}+\frac{b^3x^3}{16a^5}-\text{ecc.}$$

34. Per terzo esempio, prendiamo $y=(a+x)^m$; differenziando troveremo

$$\frac{dy}{dx}=m(a+x)^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(a+x)^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3} ;$$

facendo $x=o$, si avrà

$$(y)=a^m ; (\frac{dy}{dx})=ma^{m-1} ; (\frac{d^2y}{dx^2})=m(m-1)a^{m-2} ;$$

$$(\frac{d^3y}{dx^3})=m(m-1)(m-2)a^{m-3} ;$$

Sostituendo questi valori di (y), $(\frac{dy}{dx})$, di $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ecc. nell' equazione (17), si trova

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+m(\frac{m-1}{2})a^{m-2}x^2+$$

$$m(\frac{m-1}{2})(\frac{m-2}{3})a^{m-3}x^3+ \text{ ecc.}$$

Della differenziazione delle quantità trascendenti.

35. Si chiamano quantità trascendenti quelle che sono affette da esponenti variabili, da logaritmi, da seni ecc.

36. Sulle prime proponiamoci di differenziare a^x: Sia dunque $y=a^x$; cambiando x in $x+h$, ed y in y', questa equazione diverrà

$$y'=a^{x+h}, \text{ o piuttosto } y'=a^x a^h :$$

Bisogna dunque sviluppare questa espressione per rispetto alle potenze di h; or affinchè a^b possa svilupparsi per mezzo della formula del binomio, io farò $a=1+b$; per conseguenza a^b diverrà

$$(1+b)^h = 1 + h\frac{b}{1} + h(h-1)\frac{b^2}{1.2}$$

$$+ h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3} + \text{ec. } (18).$$

Si ordinerà per rispetto ad h: ma senza effettuare questa operazione, come noi non abbiamo bisogno che de' termini moltiplicati per la prima potenza di h, osserveremo che se nel prodotto della forma $h(h-1)$ $(h-2)(h-3)$ ec.; la parte $(h-1)(h-2)(h-3)$ ecc. è composta di n fattori, il suo sviluppo, dietro la teorica dell' equazioni, sarà della forma $h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} \ldots + Mh + N$; il termine N si comporrà dal prodotto de' secondi termini $-1, -2, -3$ ec. de' binomii $h-1$, $h-2$, $h-3$ ecc.; or poichè $h(h-1)$ $(h-2)(h-3)$, ec. $= h(h^n + Ah^{n-1} \ldots + Mh + N)$, egli è evidente che il termine il quale contiene la prima potenza di h in questo prodotto sarà Nh, o, perciocchè si è detto qui sopra, $(-1)(-2)(-3)$ecc$h$, d'onde può conchiudersi, che per trovare nello sviluppo (18) i termini affetti della prima potenza di h, ne' termini complicati di esso, cioè cominciando dal terzo, si formeranno nel seguente modo i differenti coefficienti di h: il coefficiente di h si comporrà dal prodotto de' numeri sottratti da h moltiplicati per $\frac{b^2}{1.2}$ nel terzo termine; per $\frac{b^3}{2.3}$ nel quarto, e così in seguito.

Segue da ciò che

$$a^h = 1 + \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{ec}\right)h + \text{ termini in } h^2 + \text{ termini in } h^3, \text{ ec.}$$

Rappresentiamo $\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{ec.}\right)$ con A: si a-

vrà $a^h=1+Ah+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.; sostituendo questo valore nell'equazione $y'=a^xa^h$, questa diverrà $y'=a^x+Aa^xh+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.;

Se ne togliamo l'equazione primitiva $y=a^x$, si avrà $y'-y=Aa^xh+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.; passando al limite, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=Aa^x, \text{ cioè } \frac{da^x}{dx}=Aa^x \ldots (19).$$

La costante A dipende da a; poicchè se nell'equazione

$$A=(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{ec.}),$$

si mette per b il suo valore $a-1$ si troverà

$$A=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\text{ecc.} \ldots (20).$$

37. Per determinare il valore della costante A, cerchiamo, col teorema di Maclaurin, lo sviluppo di a^x, avremo

$$y=a^x$$

$$\frac{dy}{dx}=Aa^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Ada^x}{dx}=A\frac{Aa^xdx}{dx}=A^2a^x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}\ldots\ldots=A^3a^x \text{ ec.}$$

Facciamo $x=0$, troveremo $(y)=a^0=1$, $(\frac{dy}{dx})=A$, $\frac{d^2y}{dx^2}=A^2$, $(\frac{d^3y}{dx^3})=A^3$ ec. Sostituendo questi valori

nell' equazione (17), troveremo

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3.} + \text{ec.};$$

facciamo $x = \frac{1}{A}$; questa equazione diverrà

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{ec.};$$

chiamisi e il secondo membro di questa equazione, essa si cambia in

$a^{\frac{1}{A}} = e$, dalla quale si ha $a = e^A$;

prendendo i logaritmi si ha

$loga = loge^A = Aloge$; dunque

$$A = \frac{loga}{loge} \dots (21).$$

Il numero e, il cui valore si ha per mezzo dell' equazione

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{ec.}$$

è la base scelta da *Nepero* per calcolare le sue tavole de' logaritmi.

Come la serie $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \text{ec.}$ è assai convergente, possiamo limitarci a prenderne i dieci primi termini, ed allora si troverà con molta approssimazione

$$e = 2,7182818.$$

Se il logaritmo di a nel sistema *neperiano* rappresentisi con La, si avrà

$$a=(2,7182818)^{La},$$

e più semplicemente $a=e^{La}$; dunque si avrà $loga=$ $La\,loge$, da cui si ha $La=\frac{loga}{loge}$, ciocchè riduce l'equazione (21) ad $A=La$, per cui l' equazione (19) diverrà

$$\frac{da^x}{dx}=a^x La \text{ .... } (22).$$

De' differenziali logaritmici.

38. Sia x il logaritmo di y nel sistema della base a, si avrà $y=a^x$, e perciò (37) $dy=Aa^x dx$, da cui si ha

$$dx=\frac{dy}{Aa^x}=\frac{dy}{\frac{loga}{loge}a^x}=\frac{dy}{a^x}\cdot\frac{loge}{loga};$$

e come $a^x=y$, ed $x=logy$, l' equazione precedente diverrà

$$dlogy=\frac{dy}{y}\cdot\frac{loge}{loga}.$$

Quando i logaritmi si prendono nel sistema *neperiano*, $\frac{loge}{loga}=1$; dunque allora sarà

$$dlogy=\frac{dy}{y}.$$

De' differenziali de' seni, coseni ed altre linee trigonometriche, o de' differenziali delle funzioni circolari.

39. *L'arco è più grande del suo seno, e più piccolo della sua tangente.*

Per dimostrarlo (Fig. 2.) sia AB un arco, che ha BE per seno, e DA per tangente, e prendiamo l'arco AB' eguale ad AB. Considerando la corda BB' come una linea retta, BB' è più corta dell'arco BAB': dunque la retta BE, che è la metà della corda BB' è più corta dell'arco BA metà dell'arco BAB', dal che ne risulta che il seno è minore dell'arco cui appartiene. Per dimostrare che la tangente è maggiore dell'arco, noi abbiamo. Fig. 2.

Aja del triangolo DD'C > aja del settore BAB'C, o, mettendo l'espressioni geometriche di queste aje,

$$DD' . \frac{1}{2} AC > \text{arco } BAB' . \frac{1}{2} AC;$$

supprimendo nell'una e l'altra parte il fattore commune $\frac{1}{2}AC$, resterà

$$DD' > \text{arco } BAB',$$

e prendendo la metà, si avrà

$$DA > \text{arco } BA.$$

40. Risulta da ciocchè precede, che il limite del rapporto del seno all'arco è l'unità; poicchè allorche l'arco h rappresentato da AB diviene nullo, il seno, confondendosi colla tangente, a più forte ragione si confonderà coll'arco, ch'è compreso tra la tangente, el seno medesimo; per conseguenza, nel caso del limite, si ha $\frac{\text{sen}h}{\text{arc}.h} = \frac{\text{sen}h}{h} = 1$.

41. Per trovare il differenziale del seno, il cui arco è x, supponiamo che quest' arco riceva un accrescimento h: or sappiamo dalla trigonometria che

$$\text{sen}(x+h)=\text{sen}x\cos h+\text{sen}h\cos x \ldots (22)$$

quindi sarà

$$\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}x}{h}=\frac{\text{sen}x\cos h+\text{sen}h\cos x-\text{sen}x}{h}$$

$$=\frac{\text{sen}x(\cos h-1)}{h}+\frac{\text{sen}h\cos x}{h}\ldots (23).$$

Quando h diviene o, $\cos h-1$ diviene ancora nullo, e $\frac{\cos h-1}{h}$ riducesi a $\frac{o}{o}$; converrà perciò di mettere sotto altra forma questo termine: a tal oggetto l' equazione $\text{sen}^2 h+\cos^2 h=1$ da $\cos^2 h-1=-\text{sen}^2 h$, o $(\cos h-1)(\cos h+1)=-\text{sen}^2 h$, da cui si ha $\cos h-1$ $=-\frac{\text{sen}^2 h}{\cos h+1}$; sostituendo questo valore nell'equazione (23), questa diverrà

$$\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}x}{h}=-\text{sen}x\frac{\text{sen}h}{\cos h+1}\frac{\text{sen}h}{h}+\frac{\text{sen}h\cos x}{h}\ldots (24).$$

Nel caso di $h=o$, si ha $\frac{\text{sen}h}{h}=1$, e $\frac{\text{sen}h}{\cos h+1}=\frac{o}{2}=o$;

dunque l'equazione (24) si ridurrà a

$$\frac{d\,\text{sen}x}{dx}=\cos x\text{, d' onde si ha}$$

$$d\,\text{sen}x=dx\cos x.$$

42. In questa dimostrazione il raggio delle tavole è stato preso per unità ; ma se si volesse il differenziale di un seno , allorchè il raggio è a , invece d' impiegare l' equazione (22), si farebbe uso di quest'altra

$$\operatorname{sen}(x+h)=\frac{\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x}{a} .$$

Nel caso precedente, bisognerebbe dunque restituire la costante a, il che darebbe $d\operatorname{sen}x=\frac{dx\cos x}{a}$, pel differenziale del seno di un arco, il cui raggio è a.

** 43. Il differenziale di sen$x$ si può avere dietro considerazioni geometriche; poichè sia AB (Fig. 1) l'arco x, BT l' arco h, la perpendicolare BP sarà sen$x$, e l' altra TQ sen$(x+h)$; ciò posto quanto più l' arco BT$=h$ diminuisce , tanto più l' angolo TBC tende a divenir retto ; per conseguenza nel caso del limite, si può considerare l' angolo TBC come retto ; allora il triangolo TBD diviene simile all' altro BCP, poichè in questa circostanza questi triangoli hanno i loro lati perpendicolari l' uno all' altro ; perciò si avrà la seguente proporzione Fig. 1.

$$BC : CP=BT : TD,$$

o

$$r : \cos x=BT : \operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x ,$$

Da cui si ha

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{BT}=\frac{\cos x}{r} ;$$

passando al limite, ed osservando che in questo caso la corda BT$=h$, l' equazione precedente diverrà

$\frac{d\operatorname{sen}x}{dx}=\frac{\cos x}{r}$,e prendendo il raggio$=1$,$d\operatorname{sen}x=dx\cos x$.**

44. Per ritrovare il differenziale di $\cos x$, l' equazione $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, differenziata, darà, art. 21 $2\operatorname{sen} x \operatorname{dsen} x+2\cos x \operatorname{dcos} x=0$, da cui si ha

$$\operatorname{dcos} x=\frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{dsen} x}{\cos x};$$

ponendo per $\operatorname{dsen} x$ il suo valore $dx\cos x$ (41), e riducendo, si avrà

$$\operatorname{dcos} x=-dx \operatorname{sen} x$$

45. Il differenziale di $\operatorname{tang} x$ si ottiene, considerando che $\operatorname{tang} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$; differenziando questa equazione per l'art. 19, si trova

$$\operatorname{dtang} x=\frac{\cos x \operatorname{dsen} x-\operatorname{sen} x \operatorname{dcos} x}{\cos^2 x};$$

mettendo i valori di $\operatorname{dsen} x$, $\operatorname{dcos} x$, si avrà

$$\operatorname{dtang} x=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac{dx}{\cos^2 x}:.$$

46. Si sa dalla trigonometria che il raggio è medio proporzionale tra la tangente e la cotangante, e tra il coseno e la segante, ciocchè da

$$\cot x=\frac{1}{\operatorname{tang} x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x}:$$

differenziando la prima di quest'equazioni, (art. 19), si ha

$$\operatorname{dcot} x=-\frac{\operatorname{dtang} x}{\operatorname{tang}^2 x}=-\frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tang}^2 x}=-\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x};$$

poichè dall'equazione $\frac{\operatorname{sen}}{\cos}=\operatorname{tang}$ si ottiene $\operatorname{sen}=\cos.\operatorname{tang}$.

47. L' equazione $\text{seg}x = \frac{1}{\cos x}$ differenziata da

$$d\text{seg}x = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx \text{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \text{tang}x \text{seg}x dx.$$

48. Nello stesso modo si determinerebbe il differenziale della cosegante; poichè $\text{coseg}x = \frac{1}{\text{sen}x}$; differenziando si avrà

$$d\text{coseg}x = -\frac{\cos x dx}{\text{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\text{sen}x} \cdot \frac{1}{\text{sen}x} dx = -\cot x \text{coseg}x dx.$$

49. Per riguardo al seno verso, differenziando l' equazione $\text{senv}.x = 1 - \cos x$, si avrà $d\text{senv}.x = \text{sen}x dx$.

Della differenziazione di alcune funzioni trascendenti complicate.

50. I principii precedenti basterebbero per poter differenziare ogni espressione affetta da quantità trascendenti.

Sia $y = a^{b^x}$; facciamo $b^x = u$, avremo $y = a^u$; differenziando per l' art. (35), si avrà

$$\frac{dy}{du} = a^u La = a^{b^x} La, \quad \frac{du}{dx} = b^x Lb;$$

Dunque (art. 24.) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = a^{b^x} b^x La Lb$.

51. Sia ancora $y = z^v$; prendendo i logaritmi si ha $\log y = v \log z$; dunque sarà

$$d\log y = v d\log z + \log z dv;$$

mettendo in luogo de' differenziali logaritmici i di loro valori (art. 38), troveremo

$$\frac{dy}{y}=v\frac{dz}{z}+\log z dv\text{ , e perciò}$$

$$dy=y\left(v\frac{dz}{z}+\log z dv\right)=z^{v}\left(v\frac{dz}{z}+\log z dv\right).$$

Per mezzo di questo differenziale, si troverà facilmente quello di $y=z^{t^u}$; poichè se si fa $t^u=v$, l'equazione riducesi ad $y=z^v$; or l'equazioni $y=z^v$, e $v=t^u$ che hanno la stessa forma dell'equazione, di cui abbiamo trovato il differenziale, daranno

$$dy=z^{v}\left(v\frac{dz}{z}+\log z dv\right)$$

$$dv=t^{u}\left(u\frac{dt}{t}+\log t du\right)$$

Sostituendo il valore di v, e di dv in quello di dy, avremo

$$dy=z^{t^u}\left[t^u\frac{dz}{z}+\log z t^u\left(u\frac{dt}{t}+\log t du\right)\right]=$$

$$z^{t^u}t^u\left(\frac{dz}{z}+u\log z\frac{dt}{t}+\log z\log t du\right).$$

TEOREMA DI TAYLOR.

52. Prima d'innoltrarci di vantaggio, osserveremo, che nel calcolo differenziale un' espressione della forma $\frac{dy}{dx}$ significa che una fun zione y di una o più variabili è stata

differenziata per rispetto alla variabile x, e divisa per dx: Per esempio, se si avesse $y = ax^2u^3z^4$, l' espressione $\frac{dy}{dx}$. si troverebbe, riguardando u, e z come costanti, differenziando per rispetto ad x, e dividendo in seguito per dx; sicchè si avrebbe $\frac{dy}{dx} = 2axu^3z^4$.

Nello stesso modo si troverà $\frac{dy}{dz} = 4ax^2z^3u^3$, e $\frac{dy}{du} = 3ax^2u^2z^4$. Se fosse $y = x^2 + z^2$, sarebbe

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

53. *Se in una funzione* y *di* x, *la variabile* x *si cambii in* x+h, *si ha lo stesso coefficiente differenziale, o che* x *è variabile ed* h *costante, o che* h *è variabile ed* x *costante.*

Per dimostrarlo, y diventi y', allorchè x diviene $x' = x + h$; differenziando l' equazione $y' = fx'$, supponiamo che sia $dy' = \varphi x' dx' = \varphi(x+h)d(x+h)$.

Or il solo cambiamento, che questo differenziale subisce, dietro l' ipotesi di x variabile, ed h costante, non ha luogo che nel fattore $d(x+h)$, il quale riducesi a dx: allora dunque si avrà

$$dy' = \varphi(x+h)dx,$$

da cui si ha

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi(x+h) \ldots\ldots (26).$$

Se al contrario si fa x costante ed h variabile, l' es-

pressione $\mathrm{d}(x+h)$ riducesi a $\mathrm{d}h$, e si avrà

$$\mathrm{d}y'=\varphi(x+h)\mathrm{d}h,$$

e perciò

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}h}=\varphi(x+h) \;\ldots\; (27)$$

eguagliando questi due valori di $\varphi(x+h)$, sarà

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}h}.$$

Per esempio se si avesse $y=ax^3$, mettendo $x+h$ in luogo di x, si troverebbe

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=3a(x+h)^2=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}h}.$$

54. Differenziando l'equazioni (26) e (27) per rispetto ad $x+h$, si hanno ancora de' risultamenti eguali

$$\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x+h)\mathrm{d}(x+h)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}h}=\varphi'(x+h)\mathrm{d}(x+h):$$

Facciamo h costante nella prima equazione, ed x nella seconda, si avrà

$$\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x+h)\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}h}=\varphi'(x+h)\mathrm{d}h;$$

d'onde se ne dedurrà

$$\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}h^2}$$

Collo stesso raziocinio si conchiuderà

$$\frac{d^3y'}{dx^3}=\frac{d^3y'}{dh^3},\quad \frac{d^4y'}{dx^4}=\frac{d^4y'}{dh^4}$$

e così in seguito

55. Ciò posto sia y' una funzione di $(x+h)$; sviluppandola per rispetto alle potenze di h, suppóniamo che si abbia

$$y'=y+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{ec.} \ldots. \quad (24),$$

A, B, C ecc., essendo delle funzioni ignote di x, che si tratta di determinare. A tal oggetto, differenziando per rispetto ad h, e dividendo per dh, si avrà

$$\frac{dy'}{dh}=A+2Bh+3Ch^2+\text{ec.};$$

differenziando in seguito per rispetto ad x, e dividendo per dx, si avrà

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx}+h\frac{dA}{dx}+h^2\frac{dB}{dx}+\text{ecc.}$$

E poichè i primi membri di queste due equazioni sono eguali, per l'art 53., tali saranno ancora i secondi; eguagliando dunque tra loro i coefficienti delle stesse potenze di h si troverà

$$A=\frac{dy}{dx},\quad B=\frac{dA}{2dx},\quad C=\frac{dB}{3dx},\quad D=\frac{dC}{4dx}\ \text{ecc.}$$

Sostituendo il valore di A in quella di B, e così successivamente, si avrà

$$B=\frac{d^2y}{2.dx^2},\quad C=\frac{d^3y}{2.3.dx^3},\quad D=\frac{d^4y}{2.3.4.dx^4}\ \text{ec.}$$

Per mezzo di questi valori di A, B, C ec. l'equazione (24) diverrà

$y'=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{1.2.dx^2}h^2+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}h^3$, ec., e mettendo per y' il suo valore

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3..}\text{ ecc.}$$

Ed è questa la formula di Taylor

Applicazione della formola di Taylor allo sviluppo in serie di diverse funzioni

56. Sia $y'=\sqrt{x+h}$; sarà $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$; dunque sarà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^5}},$$

Sostituendo nella formola di Taylor, si avrà

$$\sqrt{x+h}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{x}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{16}\frac{h^3}{\sqrt{x^5}},\text{ec.}$$

57. Sia $y'=\text{sen}(x+h)$, d' onde segue che $y=\text{sen}x$; si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\text{sen}x,\ \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x,\ \frac{d^4y}{dx^4}=\text{sen}\,x,\text{ ec.};$$

sostituendo nella formola di Taylor, si trova

$$\text{sen}(x+h)=\text{sen}x+\cos x\frac{h}{1}-\text{sen}\,x\frac{h^2}{1.2}-\cos x\frac{h^3}{1.3}$$

$$+\operatorname{sen}x\frac{h^4}{2.3.4}+\cos x\frac{h^5}{2.3.4.5} \text{ ecc };$$

Facendo $x=o$, si avrà sen$x=o$, e cos$x=1$, e questo sviluppo riducesi a

$$\operatorname{sen}h=h-\frac{h^3}{1.3}+\frac{h^5}{2.3.4.5}-\frac{h^7}{1....7} \text{ ecc.}$$

Se si prendesse $y'=\cos(x+h)$, operando come nell' esempio precedente, si troverebbe

$$\cos h=1-\frac{h^2}{1.2}+\frac{h^4}{1.2.3.4}- \text{ ecc.}$$

58. Cerchiamo ancora lo sviluppo di $\log(x+h)$, avremo

$$y'=\log(x+h) \text{ e perciò } y=\log x,$$

$$dy=\frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}; \text{ e per mezzo delle successive}$$

differenziazioni, si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3} \text{ ecc.};$$

Sostituendo questi valori nella formola di Taylor, avremo

$$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3} \text{ ecc.}$$

59. Si potrebbe facilmente, per mezzo di questa formula, trovare il differenziale di un logaritmo, se essa fosse nota per isviluppo algebrico: infatti questa formola da

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+ \text{ ecc.};$$

passando al limite, si avrà

$$\frac{\mathrm{dlog}.x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}, \text{ e dlog}.x=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Conoscendo il differenziale di un logaritmo, sarebbe facile trovare quello di a^x; poicchè facendo $y=a^x$, e prendendo i logaritmi nel sistema neperiano, si ha

$$\mathrm{L}y=\mathrm{L}a^x=x\mathrm{L}a;$$

e differenziando

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}x\mathrm{L}a,$$

d' onde si ha

$$\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x\mathrm{L}a,\ a^x\mathrm{d}x\mathrm{L}a.$$

60. Si può dedurre il teorema di Maclaurin da quello di Taylor nel seguente modo:
Si ha pel teorema di Taylor

$$f(x+h)=fx+\frac{\mathrm{d}.fx}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{\mathrm{d}^3fx}{\mathrm{d}x^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ ecc. (25).}$$

S' indichino con (fx), $(\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x})$, $(\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2})$ ecc. ciocchè diviene fx, $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$ ecc. quando in esse si fa $x=o$;

la formola (25), quando in essa si farà $x=o$, diverrà

$$fh=(fx)+(\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x})h+(\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2})\frac{h^2}{1.2.}+\text{ ec.}$$

In questa equazione h entra in fh, come x entrava in fx, in guisa che se si cambia h in x, fh diverrà fx; facendo dunque questo cambiamento, si trova

$$fx=(fx)+(\frac{dfx}{dx})x+(\frac{d^2fx}{dx^2})\frac{x^2}{1.2}+\text{ecc.}\ldots(26)$$

ch' è il teorema di Maclaurin.

Della differenziazione dell' equazioni a due variabili.

61. Sia $F(x,y)=o \ldots (27)$, una eqnazione tra due variabili. Risolvendo questa equazione per rispetto ad y, si troverà $y=\varphi x$; imaginiamo che questo valore sia stato sostituito nell' equazione (27), questa diverrà $F(x,\varphi x)=o$, o per maggior semplicità

$$fx=o \ldots (28),$$

equazione identica, nella quale tutt' i termini debbono distruggersi, qualunque valore diesi ad x. Per esempio, se questa equazione non monta che al terzo grado, si potrà rappresentarla con

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=o,$$

e mettendo per x un valore qualunque, essa sarà sempre soddisfatta; dunque mettendo $x+h$ in luogo di x, si avrà

$$A(x+h)^3+B(x+h)^2+C(x+h)+D=o;$$

cioè se si ha $fx=o$, qualunque sia x, si avrà parimente $f(x+h)=o$, e togliendo da questa la prima, sarà $f(x+h)-fx=o$;
dunque sarà

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=o$$

Ora $f(x+h)=fx+Ah+Bh^2+$ ecc.
da cui si ha

$$\frac{f(x+h)-fx)}{h}=A+Bh+\text{ec.};$$

il primo membro di questa equazione essendo zero, si avrà parimente

$$A+Bh+\text{ec.}=o;$$

e passando al limite, $\frac{dfx}{dx}=A=o$, e perciò $dfx=Adx=o$, o piuttosto, rimettendo y, $dF(x,y)=Adx=o$.

Ciò c' insegna, che riguardando y, come una funzione di x, se si differenzia l'equazione $F(x,y)=o$, il risultamento potrà mettersi eguale a zero, il che servirà a determinare il valore del coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, come lo vedremo nell' esempio seguente.

Sia dunque $F(x,y)=x^2+3ay-y^2=o$ ... (29): differenziando co' metodi ordinarii, ed osservando che il risultamento dee eguagliarsi a zero per la dimostrazione precedente, si ha

$$2xdx+3ady-2ydy=o \ldots (30);$$

da questa equazione si ottiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y-3a} \ldots (31).$$

61. Se si paragona l' andamento che ci ha fatto ottenere questo valore con quello che abbiamo finora impiegato, si vedrà che, servendoci di questo primo metodo, sarebbe stato uopo di mettere sulle prime l'equazione (27) sotto la forma $y=fx$, e per conse-

guenza di sciogliere l' equazione per rispetto al y, per dedurne inseguito il valore di $\frac{dy}{dx}$ mercè la differenziazione. Secondo questo metodo troveremmo sulle prime

$$y=\frac{3x}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}a^2+x^2)},$$

ed in seguito, per mezzo della differenziazione

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{(\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2})}$$

Questo valore di $\frac{dy}{dx}$ si presenta sotto una forma

differente di quello che ci offre l' equazione (31); ma mettendo il valore di y nell' equazione (31), essa diverrà

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x}{2(\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2})}=\pm\frac{x}{(\sqrt{\frac{9}{2}a^2+x^2})},$$

come abbiamo trovato. L' equazione (30) è il primo differenziale dell' equazione (29). Per ottener l' equazione, che dà il coefficiente differenziale di se-

cond' ordine, cioè $\frac{d^2y}{dx^2}$, dividendo l' equazione (30)

per dx, e facendo $\frac{dy}{dx}=p$, questa equazione diverrà

$$2x+3ap-2yp=o;$$

riguardando y e p come funzioni di x, differenziando avremo

$$2dx+3adp-2ydp-2pdy=0\ ;$$

dividendo per dx e mettendo p in luogo di $\frac{dy}{dx}$, si avrà

$$2+3a\frac{dp}{dx}-2y\frac{dp}{dx}-2p^2=0\ ,$$

d' onde otterremo

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p^2-2}{3a-2y}\ \ldots\ (32)\ ;$$

Or poichè $p=\frac{dy}{dx}$, avremo $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$; mettendo questi valori nell' equazione (32), e liberando da fratti, ne verrà

$$d^2y(3a-2y)=2dy^2-2dx^2\ \ldots\ (33):$$

tale sarà il secondo differenziale dell' equazione (29).

Per avere il terzo differenziale, si farà $\frac{dp}{dx}=q$, e l' equazione (32) diverrà, dopo aver fatto svanire il denominatore

$$3aq-2yq=2p^2-2\ ;$$

Si differenzierà riguardando y, p, q, come funzioni di x, e si troverà il terzo differenziale, e così in seguito.

63. Invece d' impiegare le lettere p, q, r ecc. per fare le operazioni, si perverrebbe allo stesso risultamento, differenziando l' equazione (30), e mettendo dy pel differenziale di y, d^2y per quello di dy, d^3y per quello di d^2y ecc. e riguardando dx come costante; in questo modo si troverebbe

$$2dx^2+3ad^2y-2dy^2-2yd^2y=0$$

equazione identica all' altra (33).

64. Diamo ora l'espressione generale del differenziale dell'equazione $f(x,y)=0$. A tal oggetto rappresentisi $f(x,y)$ con u; differenziando questa equazione per rispetto ad x, avremo il termine $\frac{du}{dx}dx$, e differenziandola per rispetto ad y, avremo un secondo termine $\frac{du}{dy}dy$; e si avrà $df(x,y)$, o $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$. Ma se y si consideri come una funzione di x, differenziandola avremo

$$dy=\frac{dy}{dx}dx;$$

sostituendo questo valore, si avrà

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx.$$

65. Applicando quì la verità del teorema art. (24), si vedrà che, considerata u come una funzione di y, ed y di x, il prodotto $\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx$ non è altro che il differenziale di u preso per rispetto ad x racchiuso in y.

66. L'intero differenziale di una funzione di x ed y essendo dato per mezzo dell'equazione $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$, l'espressioni $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$ hanno ricevuto il nome di differenziali parziali di u.

Similmente se u è una funzione di tre variabili x, y, z indipendenti, avremo

$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$, ed i termini $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, $\frac{du}{dz}dz$ saranno i differenziali parziali di u.

67. Abbiamo veduto (art. 52) che una espressione della forma $\frac{dy}{dx}$, indicava che la funzione y era stata differenziata per rispetto ad x : Segue da ciò, che se si ha l'equazione $\frac{dy}{dx} = A$, e che se ne tiri

$$1 = \frac{A}{\frac{dy}{dx}},$$

non si può conchiudere senza dimostrazione, che $1 = A\frac{dx}{dy}$, poichè in questa nuova equazione il differenziale non è preso per rispetto ad x, ma ad y, e non si sa se in questa nuova ipotesi di differenziazione, il risultamento sia lo stesso. Per togliere questa difficoltà, si è dimostrato (art. 24) che

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Se in questa equazione si fa $v = x$, essa diverrà

$$1 = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

da cui si ottiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

ciocchè fa vedere che il cambiamento d'ipotesi di differenziazione si accorda coll'algebra.

** 68. Ecco come potrebbe dimostrarsi direttamente, che col valore di convenzione, che il segno della divisione dà al fratto $\frac{dx}{dy}$, abbia luogo la seguente equazione

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Sia

$$\frac{y'-y}{x'-x}=A+Bh+Ch^2+\text{ec.};$$

si avrà

$$\frac{x'-x}{y'-y}=\frac{1}{A+Bh+Ch^2+\text{ec.}}$$

Facendo la divisione, o sviluppando mercè il teorema di Maclaurin, si avrà

$$\frac{x'-x}{y'-y}=\frac{1}{A}-\frac{B}{A}h+\text{ec.};$$

Passando al limite si ha

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{A};$$

e poicchè si ha

$$\frac{dy}{dx}=A,$$

ne segue che sarà

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Del metodo delle tangenti.

Fig. 3. 69. Chiamasi metodo delle tangenti quello che dà l'espressioni differenziali delle tangenti, sottangenti e normali e sonnormali. Siano (Fig. 3) x, y le coordinate del punto M, preso sopra una curva: aumentiamo l'ascissa AP$=x$ di una quantità PP'$=h$; tirisi l'ordinata P'M', e pe' punti MM' facciamo passare una segante M'S. E' chiaro che quanto più diminuirà PP', tanto più PS tenderà a confondersi colla sottangente PT, finchè alla fine PP'$=h$ divenga zero; dunque PT sarà il limite, verso il quale tende PS.

Cerchiamo ora l'espressione analitica di PS, per prenderne il limite: i triangoli simili M'MQ, MSP danno la proporzione

$$\text{M'Q} : \text{QM} = \text{MP} : \text{PS}, \text{ o}$$

$$\text{M'Q} : h = y : \text{PS};$$

dunque sarà

$$\text{PS} = \frac{hy}{\text{M'Q}}:$$

Per determinare M'Q, si ha

$$\text{M'Q} = \text{M'P'} - \text{MP};$$

$$\text{or M'P'} = y' = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}$$

ed MP$=y$; sicchè si avrà

$$\text{M'Q} = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}:$$

sostituendo questo valore in quello di PS, si avrà

$$\text{PS} = \frac{hy}{\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}} = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h}{1.2} + \text{ec.}}.$$

Al limite $h=0$, PS si cambia in PT, ciocchè da Fig. 3

$$PT=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=\frac{ydx}{dy} \text{ (art. 67)} = \textit{sottangente}$$

70. Se dal punto M si tiri una perpendicolare MN sopra di MT, la sunnormale sarà PN.

Per determinarla avremo

$$PT : PM = PM : PN, \text{ o}$$

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : PN;$$

dunque sarà $PN = y\frac{dy}{dx} =$ *sunnormale*.

Per rispetto alla tangente, ed alla normale si ha

$MT = \sqrt{(\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2)}$, ed $MN = \sqrt{(\overline{PN}^2 + \overline{PM}^2)}$

cioè

$$tang = \sqrt{(y^2\frac{dx^2}{dy^2} + y^2)} = y\sqrt{(\frac{dx^2}{dy^2} + 1)} \text{ e}$$

$$norm = \sqrt{(y^2\frac{dy^2}{dx^2} + y^2)} = y\sqrt{(\frac{dy^2}{dx^2} + 1)}.$$

71. Per trovare l' equazione della tangente, siano x'. y' le coordinate al punto di contatto:

L' equazione della retta MT, che passa pel punto di contatto, potrà esser rappresentata da

$$y - y' = A(x - x').$$

A essendo la tangente dell' angolo MTP, sarà

$$A = \frac{PM}{PT} = \frac{y'}{\text{sottang}} = \frac{y'}{\frac{y'dx'}{dy'}} = \frac{dy'}{dx'},$$

Fig. 3. per cui l'equazione della tangente diverrà

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')\ ,\ \textit{equazione della tangente.}$$

Dunque quella della normale sarà

$$y-y'=-\frac{dx'}{dy'}(x-x').$$

Applicazione delle Formole precedenti a degli esempii.

72. 1°. *Trovare la sottangente della parabola.*
L'equazione della parabola essendo $y^2=px$, differenziandola si avrà, $2ydy=pdx$, e perciò

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}\ ;$$

sostituendo questo valore in quello di PT, si ha

$$\text{sottang}=\frac{2y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x\ .$$

2°. *Trovare la sunnormale dell'ellisse.*
L'equazione $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ dell'ellisse rapportata al centro come origine, essendo differenziata, da

$$2a^2ydy+2b^2xdx=0\ ,$$

da cui si ha

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\ ;$$

mettendo questo valore in quello di PN, si avrà

$$\text{sonnormale}=-\frac{b^2}{a^2}x$$

3°. *Trovare l' espressione della tangente al cerchio.* Fig. 3.
L' equazione $x^2+y^2=r^2$, ch' è quella del cerchio, essendo differenziata, da

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x};$$

Per mezzo di questo valore l' espressione di MT riducesi a

$$\text{tang}=y\sqrt{(\frac{y^2}{x^2}+1)}=y\sqrt{(\frac{x^2+y^2}{x^2})}=y\sqrt{\frac{r^2}{x^2}}=\frac{ry}{x}.$$

Degli asintoti delle curve.

** 73. L' espressione AT (Fig. 4) della distanza del vertice della curva dal punto d' incontro della tangente coll' asse delle ascisse, deducesi facilmente dall' equazione della tangente; poicchè se il vertice A della curva si prende per origine, la retta AT sarà la distanza di questo vertice dal punto in cui l' ordinata diviene zero. Fig. 4.

E poicchè l' equazione della tangente MT è

$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$, basterà di fare in questa equazione $y=0$, affinchè il valore di x, che se ne deduce, sia quello di AT: in questa maniera si otterrà

$$AT=x'-y'\frac{dx'}{dy'}.$$

Per conoscere la distanza dell' origine dal punto, in cui la tangente incontra l' asse delle y, bisognerà trovare l' ordinata che corrisponde ad $x=0$ nell'equazione della tangente, ed avremo

$$AB=y'-\frac{dy'}{dx'}x'.$$

Fig. 4. Supponiamo ora che x' divenendo infinito, AT ed AB conservino valori finiti; se ne conchiuderà che la retta TB non incontrerà la curva AI che ad una distanza infinita: dunque TBM sarà un asintoto di questa curva.

74. Prendiamo per esempio l'equazione $y'^2 = mx + nx'^2$; differenziando si avrà

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m+2nx'}{2y'};$$

dunque,

$$AT = x' - \frac{2y'^2}{m+2nx'} = \frac{mx'+2nx'^2-2y'^2}{m+2nx'}$$

$$= -\frac{mx'}{m+2nx'} = -\frac{m}{\frac{m}{x}+2n}$$

$$AB = y' - \frac{mx'+2nx'^2}{2y'} = \frac{2y'^2-mx'-2nx'^2}{2y'}$$

$$= \frac{mx'}{2\sqrt{(mx'+nx'^2)}} = \frac{m}{2\sqrt{(\frac{m}{x}+n)}}$$

Allorchè si fa $x'=\infty$, questi valori si riducono ad

$$AT = -\frac{m}{2n}, \quad AB = \frac{m}{2\sqrt{n}}; \ldots (34);$$

Dunque la curva sarà suscettibile di asintoti, purchè però n non sia nè negativo, nè zero; poicchè nel primo caso il valore di AB diverrebbe imaginario, infatti se n è negativo, l'equazione appartiene ad un' ellisse, ch' essendo curva chiusa, non può avere rami infiniti: nel secondo caso poi i valori di AT e di AB diverrebbero infiniti, e poicchè, allorchè $n=0$, l'equazione nostra è quella della parabola, ne segue che la parabola non può avere asintoti.

Dell' equazione del piano tangente ad una superficie curva, e di quella della normale a questa superficie. Fig. 5.

** 74. Siano $f(x,y,z)=0$ l'equazione di una superficie curva, ed $Ax+By+Cz+D=0$ quella di un piano. Se il punto di contatto M ha per coordinate x', y', z', queste dovranno soddisfare all' equazione del piano, e per conseguenza si avrà

$$Ax'+By'+Cz'+D=0:$$

Eliminando D tra questa equazione, e la precedente, il piano che passa pel punto x', y', z' avrà per equazione

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0 \ldots (35).$$

Facciasi passare pel punto di contatto x', y', z' un piano parallelo a quello delle x, z; questo taglierà la superficie secondo una curva MC, el piano tangente secondo una retta ML, la quale dovrà esser tangente alla curva MC; altrimenti il piano tangente taglierebbe la superficie curva.

L' equazione della retta ML può dedursi dall' altra (35), poichè essendo LM l' intersezione del piano tangente con un piano paralello a quello della x, z, in tutt' i suoi punti ha de' valori eguali per y, e come il punto M è sopra di questa retta, si ha $y=y'$, o $y-y'=0$: quindi l' equazione (35) riducesi ad

$$A(x-x')+C(z-z')=0.$$

Questa equazione esprimerà dunque la relazione ch'esiste tra le coordinate z ed x di un punto qualunque preso sulla retta ML, e per conseguenza sarà l' equazione di questa retta. Si metta sotto la forma

$$z-z'=-\frac{A}{C}(x-x') \ldots (36).$$

Da un' altra parte l' equazione della curva MC si otterrà ancora, riguardando y come costante nell' equazione della superficie curva $f(x,y,z)=0$.

Fig. 6. Se si vuole ora esprimere la condizione che la retta ML sia tangente alla curva MC, bisogna che il coefficiente di $x-x'$ dell' equazione (36) sia eguale a $\frac{dz'}{dx'}$, (70), che può aversi dall' equazione della curva MC.

Or l' equazione di questa curva, essendo quella stessa della superficie, in cui siasi supposto y costante, basterà di differenziare l' equazione di questa superficie, e tirarne $\frac{dz}{dx'}$ poicchè la notazione $\frac{dz}{dx}$ (art.52) suppone che y si riguarda come costante nella differenziazione

Segue da ciò, che per essere ML tangente di MC, bisogna che sia

$$-\frac{A}{C}=\frac{dz'}{dx'},$$

da cui si ha

$$A=-C\frac{dz'}{dx'} \ldots (37).$$

In seguito se per M si meni un piano paralello all' altro delle z, y, questo taglierà la superficie secondo una curva MD, el piano tangente secondo una retta MN.

Si dimosterà come quì sopra che questa retta MN debba esser tangente alla curva d' intersezione MD, e che per tutt' i punti di essa le ascisse sono eguali; si ha perciò $x-x'=0$, ciocchè riduce l' equazione (35) a

$$B(y-y')+C(z-z')=0, \text{ da cui si ha}$$

$$z-z'=-\frac{B}{C}(y-y').$$

Questa equazione essendo quella della retta MN,

si esprimerà questa condizione facendo $-\frac{B}{C}=\frac{dz'}{dy'}$,

da cui si ha $B=-C\frac{dz'}{dy'}$ ... (38).

Se nell' equazione (35) si sostituiscano i valori di A, e B dati dall' equazioni (37), e (38), riducendo, si avrà per l'equazione del piano tangente

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x')+\frac{dz'}{dy'}(y-y') \ldots (39).$$

76. Cerchiamo per esempio l'equazione di un piano tangente alla sfera. Le coordinate del suo centro essendo a, b, c, la sfera avrà per equazione

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2;$$

Differenziando si ha

$$(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0,$$

da cui si deduce, dietro la notazione espressa (art. 52),

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a-x}{z-c}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{b-y}{z-c}.$$

Dunque l' equazione del piano tangente alla sfera al punto, in cui le coordinate sono x', y', z', sarà

$$z-z'=\frac{a-x'}{z'-c}(x-x')+\frac{b-y'}{z'-c}(y-y').$$

77. Se questo piano passasse per l' estremità del diametro verticale, si avrebbe $x'=a$, $y'=b$, $z'=c+r$.

Questi valori ridurrebbero l' equazione del piano tangente a $z=z'=c+r$, ch' è l' equazione del piano parallelo a quello delle x, y.

78. L' equazioni della normale al punto x', y', z' possono dedursi facilmente dall' equazione del piano tangente. Infatti si sa (vedi la mia *Teoria delle*

curve di secondo ordine) che se si hanno l'equazioni

$$Ax+By+Cz+D+o \ldots (40),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \ldots\ldots (41),$$

la prima appartenente ad un piano, e le altre ad una retta, le condizioni necessarie, affinchè questa retta sia perpendicolare al piano sono

$$A = aC, \quad B = bC.$$

Se si paragona l'equazione (39) del piano tangente all'altra (40), eguagliando tra loro rispettivamente i coefficienti di x, di y, e di z, si troverà

$$A = -\frac{dz'}{dx'}, \quad B = -\frac{dz'}{dy'}, \quad C = 1;$$

dunque sarà

$$a = -\frac{dz'}{dx'}, \quad b = -\frac{dz'}{dy'};$$

sostituendo questi valori nell' equazioni (41), si ha

$$x = -\frac{dz'}{dx'} z + \alpha, \quad y = -\frac{dz'}{dy'} z + \beta;$$

E poichè il punto x', y', z' dee soddisfare a queste equazioni, si ha ancora

$$x' = -\frac{dz'}{dx'} z' + \alpha, \quad y' = -\frac{dz'}{dy'} z' + \beta:$$

eliminando α e β tra queste ultime quattro equazioni, si troverà per l' equazioni della normale al punto x', y', z'

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z - z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z - z').$$

Delle funzioni, che divengono $\frac{0}{0}$ per un dato valore della variabile.

79. Allorchè una funzione $\frac{Fx}{\varphi x}$ diviene $\frac{0}{0}$ per avervi sostituito un valore di x, che rappresenterò con a, ciò indica che i due termini della frazione hanno per fattore di comune $x-a$, o, in generale, $(x-a)^m$: se questo fattore comune potesse farsi svanire ne' due termini, si avrebbe il vero valore della frazione.

Supponiamo dunque che $x-a$ sia m volta fattore in Fx, ed n volta in φx (salvo a supporre, se il caso l'esige, che m ed n siano amendue eguali all' unità o a zero); si potrà fare

$$Fx = P(x-a)^m, \quad \varphi x = Q(x-a)^n.$$

Per mezzo della differenziazione si troverà

$$\frac{dFx}{dx} = \frac{dP}{dx}(x-a)^m + mP(x-a)^{m-1}.$$

Osserviamo che questo valore di $\frac{dFx}{dx}$ si compone di due termini, uno de' quali contiene una potenza di $x-a$ minore dell' unità di quella ch' entra nella funzione. Per la stessa ragione, prendendo il coefficiente differenziale di $\frac{dFx}{dx}$ si troverà un termine affetto da $(x-a)^m$, un altro da $(x-a)^{m-1}$, ed un terzo da $(x-a)^{m-2}$; quest' ultimo sarà $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$. Continuando nello stesso modo, si vedrà che ogni nuova differenziazione riproduce de' termini affetti dalle stesse potenze di $(x-a)$, più un termine, nel quale la potenza di $x-a$ è diminuita di una unità: Perciò, prendendo i coeffi-

cienti differenziali successivi, il termine che contiene la meno alta potenza di $x-a$, sarà
dopo la prima differenziazione $mP(x-a)^{m-1}$
dopo la seconda . . . . . $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$
dopo la terza . . . . $m(m-1)(m-2)P(x-a)^{m-3}$
dopo la n.^{ma} . . . . $m(m-1)$ ..... $P(x-a)^{m-n}$

Di maniera che il coefficiente differenziale di Fx dell' ordine r, sarà di questa forma

$$\frac{d^rFx}{dx^r}=\chi(x-a)+{}^m\chi'(x-a)^{m-1}+\chi''(x-a)^{m-2}\ldots$$
$$+m(m-1)(m-2)\ldots P(x-a)^{m-r}.$$

Ciocchè abbiamo detto di Fx potendosi applicare a φx, si troverà che il differenziale dell' ordine n della funzione proposta avrà la seguente forma

$$\frac{\frac{d^rFx}{dx^r}}{\frac{d^r\varphi x}{dx^r}}=\frac{\chi(x-a)^m+\chi'(x-a)^{m-1}\ldots+m(m-1)\ldots.}{Z(x-a)^n+Z'(x-a)^{n-1}\ldots+n(n-1)\ldots}$$
$$\frac{P(x-a)^{m-r}}{Q(x-a)^{n-r}}\ldots\ldots(42).$$

80. Ciò posto consideriamo tre casi

1° $n=1$, 2° $m>n$, 3° $m<n$

Se $m=n$, e che il numero r di differenziazioni fatte sia eguale ad m, i binomii $(n-a)^{m-r}$, $(x-a)^{n-r}$ si ridurranno entrambi ad $(x-a)^0$, cioè all' unità; per rispetto agli altri binomii $(x-a)^m$, $(x-a)^{m-1}$, ecc, $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$ ecc., essi sono nulli nella ipotesi di $x=a$: perciò tutt' i termini, fuori l' ultimo del numeratore, e del denominatore, svaniranno, e l' equazione (42) si ridurrà a

$$\frac{\frac{d^mFx}{dx^m}}{\frac{d^m\varphi x}{dx^m}}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots P}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots Q}=\frac{P}{Q}.$$

Quando è $m > n$, se il numero r delle differenziazioni fatte è eguale ad n, il binomio $(x-a)^{n-r}$ ridurrassi ad $(x-a)^0=1$. Gli esponenti $n-1$, $n-2$ ecc., $m-1$, $m-2$ ecc. degli altri binomii, essendo maggiori di $n-r$, sorpassano l'unità; per conseguenza questi binomii riduconsi ciascheduno a zero, allorchè si fa $x=a$; dunque in questa ipotesi tutt' i termini svaniscono, all' infuori di quello nel quale vi entra $(x-a)^{n-r}$, e l'equazione (42) ridurrassi a

$$\frac{\frac{d^nFx}{dx^n}}{\frac{d^n\varphi x}{dx^n}}=\frac{0}{n(n-1)...Q(x-a)^{n-r}}=\frac{0}{n(n-1)...Q}=0.$$

Finalmente nel caso di $m < n$, il numero r delle differenziazioni fatte, supposto eguale ad m, tutt' i termini svaniranno fuorchè $m(m-1)...P(x-a)^0$, e resterà

$$\frac{\frac{d^mFx}{dx^m}}{\frac{d^m\varphi x}{dx^m}}=\frac{m(m-1)...P}{0}=\infty$$

81. Da ciocchè precede ne risulta la seguente regola: *allorchè si vuol determinare il vero valore di una frazione* $\frac{Fx}{\varphi x}$, *che diviene* $\frac{0}{0}$ *per mezzo di un dato valore della variabile, si differenzieranno separatamente i due termini di questa frazione, e si esaminerà dopo se i valori* $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d\varphi x}{dx}$ *si riducano ancora a zero, mercè il valore ipotetico della variabile; se ciò ha luogo, si prenderanno*

i coefficienti differenziali dell' espressioni $\frac{dFx}{dx}$ e $\frac{d\varphi x}{dx}$, *e si vedrà se nella stessa ipotesi della variabile, questi coefficienti differenziali si riducano ciascuno a zero: continuando in tal modo questa verificazione, se dopo un certo numero di differenziazioni si trova che i due termini della funzione non svaniscano mercè un dato valore della variabile, questa ultima frazione sarà il vero valore di* $\frac{Fx}{\varphi x}$; *ma se il numeratore solamente diviene* o *pel valore di* x, *l' espressione* $\frac{Fx}{\varphi x}$ *sarà nulla; infine se il solo denominatore è quello che svanisce pel dato valore di* x, *l' espressione* $\frac{Fx}{\varphi x}$ *sarà infinita.*

82. Prendiamo per esempio la frazione $\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{x^3-b^3}{4x-4b}$: Questa frazione poicchè diviene $\frac{0}{0}$, allorchè $x=b$, se noi vogliamo averne il vero valore, differenzieremo i suoi due termini, ed avremo $\frac{3x^2}{4}$, e come i due termini di questa frazione non divengono nulli nell' ipotesi di $x=b$, il vero valore della frazione proposta sarà $\frac{3b^2}{4}$, allorchè $x=b$.

83. Prendiamo per secondo esempio la frazione

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3};$$

Poichè questa riducesi a $\frac{0}{0}$; allorchè si fa $x=1$, differenzieremo i suoi due termini, per ottenere il valore, e troveremo

$$\frac{3x^2-3}{4x^3-12x+8}:$$

i due termini di questa frazione divenendo ancora nulli nell' ipotesi di $x=1$, li differenzieremo parimente, ed avremo

$$\frac{6x}{12x^2-12}:$$

In questa frazione il solo denominatore riducesi a zero, allorchè si fa $x=1$; dunque la proposta frazione diviene infinita, nell' ipotesi di $x=1$.

84. Se si applicasse la stessa regola alla frazione

$$\frac{a^x-b^x}{x},$$

che diviene $\frac{0}{0}$ nell' ipotesi di $x=0$, differenziando i due termini di essa, si troverà

$$\frac{a^x\log a-b^x\log b}{1},$$

espressione, il di cui numeratore non diviene nullo nell' ipotesi di $x=0$, e che per conseguenza da $\log a-\log b$, allorchè $x=0$.

Egli è ben evidente che il fattore comune a' due termini della frazione proposta è $x-0$, cioè x; ma come riconoscere questo fattore in a^x-b^x? Per giungervi, noi osserveremo che, per l' art. (37)

$$a^x = 1 + A\frac{x}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \text{ecc.}$$

$$b^x = 1 + B\frac{x}{1} + \frac{B^2x^2}{1.2} + \text{ecc.};$$

Dunque prendendo la differenza

$$a^x - b^x = (A-B)x + \frac{A^2 - B^2}{1.2}x^2 + \text{ecc.}$$

e si vede che x è fattore comune di $a^x - b^x$.

35. Non bisogna intanto credere che la regola esposta basti per tutt'i casi: la dimostrazione precedente è fondata sull'ipotesi che m ed n siano numeri interi; ma se essi fossero fratti, non potrebbe, per mezzo delle differenziazioni successive, ottenersi un termine, nel quale $x-a$ si trovasse elevato alla potenza o; per conseguenza non si potrebbe col metodo adottato al di sopra, sprigionar la frazione dal fattore comune.

Sia dunque, per maggiore generalità, l'equazione

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P(x-a)^\alpha + Q(x-a)^\beta + R(x-a)^\gamma + \text{ec.}}{P'(x-a)^{\alpha'} + Q'(x-a)^{\beta'} + R'(x-a)^{\gamma'} + \text{ec.}},$$

nella quale α', β, γ ec. sono dalle frazioni crescenti egualmente che α', β', γ', ecc.

Poicchè questa espressione riducesi a $\frac{o}{o}$, allorchè si fa $x=a$, si potrà, invece di fare $x=a$, sostituire $a+h$ in luogo di x, riserbandoci di porre $h=o$, dopo le debite riduzioni: allora sarà lo stesso che di aver fatta da principio l'ipotesi di $x=a$: si avrà $x-a=h$, e perciò

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^\alpha + Qh^\beta + Rh^\gamma + \text{ecc.}}{P'h^{\alpha'} + Q'h^{\beta'} + R'h^{\gamma'} + \text{ecc.}} \;\ldots\ldots (43).$$

Considerando α ed α', che sono i più piccoli nelle

serie degli esponenti del numeratore, e del denominatore rispettivamente, si può dar luogo a tre supposizioni, cioè

$$1^a\ \alpha > \alpha',\ 2^a\ \alpha = \alpha';\ 3^a\ \alpha < \alpha':$$

Nel primo caso dividendo per $h^{\alpha'}$ i due termini della frazione (43), si avrà

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^{\alpha-\alpha'} + Qh^{\beta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'}\ \text{ec.}}{P' + Q'h^{\beta'-\alpha'} + R'h^{\gamma'-\alpha'} + \text{ec.}} \ldots (44):$$

Secondo la supposizione fatta è $\alpha > \alpha'$; dunque il numero $\alpha - \alpha'$ sarà positivo; ed a più forte ragione $\beta - \alpha'$, $\gamma - \alpha'$, $\beta' - \alpha'$, poichè per ipotesi si ha

$$\alpha < \beta < \gamma\ \text{ec.},\ \alpha' < \beta' < \gamma'\ \text{ec.},\ \alpha' < \alpha.$$

Ciò posto se si fa $h=0$ nell' equazione (44), tutt' i termini del secondo membro di essa svaniranno, fuori di P'; e perciò questa equazione ridurrassi a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{0}{P'} = 0.$$

Nel 2.° caso, in cui è $\alpha = \alpha'$, il termine $Ph^{\alpha-\alpha'}$ riducesi a $Ph^0 = P$; l'equazione (44) riducesi a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P + Qh^{\beta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'} + \text{ec.}}{P' + Q'h^{\beta'-\alpha'} + R'h^{\gamma'-\alpha'} + \text{ec.}},$$

nella quale, fatto $h=0$, si avrà

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P}{P'}.$$

Finalmente nel 3.° caso, in cui si ha $\alpha < \alpha'$, dividendo l'equazione (44) per h^{α}, essa si ridurrà a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P + Qh^{\beta-\alpha} + Rh^{\gamma-\alpha} + \text{ec.}}{P'h^{\alpha'-\alpha} + Q'h^{\beta'-\alpha} + R'h^{\gamma'-\alpha} + \text{ec.}}$$

e si vede chiaro, che l'ipotesi di $h=o$ riduce questa equazione a

$$\frac{\mathrm{F}x}{\varphi x}=\frac{\mathrm{P}}{o}=\infty\,.$$

86. Prendiamo per esempio la frazione

$$\frac{(x^2-3ax+2a^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^3-a^3)^{\frac{1}{2}}},$$

Che riducesi a $\frac{o}{o}$, allorchè si fa $x=a$. Se in questione si mette $a+h$ in vece di x, essa diverrà

$$\frac{(h^2-ah)^{\frac{2}{3}}}{(3a^2h+3ah^2+h^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{2}{3}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}\,h^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{1}{6}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

facendo $h=o$, si avrà

$$\frac{\mathrm{F}x}{\varphi x}=\frac{o}{(3a^2)^{\frac{1}{2}}}=o$$

Questo metodo può applicarsi a tutt' i casi.

87. Se un valore di x rendesse infiniti amb' i termini della frazione, questi si dividerebbero per $\mathrm{F}x.\,\varphi x$, e si avrebbe

$$\frac{\mathrm{F}x}{\varphi x}=\frac{\frac{1}{\varphi x}}{\frac{1}{\mathrm{F}x}}=\frac{o}{o}\,.$$

88. In fine se si avesse un prodotto MN, nel quale l'ipotesi di $x=a$ rendesse nullo uno de' fattori, e l'altro infinito; e sia $M=0$, e $N=\infty$, si scriverebbe così questo prodotto.

$$MN=\frac{M}{\frac{1}{N}}=\frac{0}{0}.$$

De' massimi e minimi, nelle funzioni di una sola variabile.

89. Nella serie di Taylor si può dare un valore all' accrescimento h, tale che uno de' termini della serie divenga più grande della somma di tutti gli altri che seguono. Infatti, essendo questa serie rappresentata da

$$y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{dy^3}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ecc.}$$

se si vuole che $\frac{dy}{dx}h$, per esempio, divenga più grande della somma di tutti gli altri termini che seguono, mettiamo tutt' i termini della serie, meno il primo, sotto la forma

$$\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{2.3}+\text{ec.}\right)h..(45).$$

Or quando si fa $h=0$, divenendo parimente nulla la parte $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{2.3}$, si vede bene ch' essa può esser renduta tanto piccola, quanto si vorrà, dando ad h un valore assai vicino al zero, ed esser così sorpassata da $\frac{dy}{dx}$, ch' è indipendente da h. Sia

dunque Z ciocchè diviene in questo caso $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2}$ + ecc.;

La serie (45) ridurrassi a $(\frac{dy}{dx}+Z)h$; e come allora si ha $\frac{dy}{dx}>Z$, o $\frac{dy}{dx}h>Zh$, il termine $\frac{dy}{dx}h$ risulta più grande della somma di tutti quelli, che seguono. Lo stesso si dimostrarebbe per ogni altro termine rispetto a quelli che lo seguono.

90. Sia $y=\varphi x$, una equazione tra due variabili; Questa equazione può esser sempre riguardata come quella di una curva, in cui i differenti valori della funzione y sarebbero le ordinate: questa funzione y dirassi giunta al suo minimo, allorchè dopo di aver diminuita successivamente, essa è sul punto di ricominciare a crescere.

Fig.6. Sia per esempio la curva MDN, Fig.6, che ha per equazione $y=b+cx^2$; si vede che le ordinate $n''q''$, $m'p''$ ecc. vanno diminuendo fino al punto D; e che al di là di questo punto le ordinate $p'm'$, $q'n'$ ec. vanno sempre crescendo: perciò l'ordinata AD rappresenta il minimo valore della funzione y.

91. Similmente una funzione si dirà giunta al suo massimo, allorchè dopo di esser cresciuta successivamente, essa arriva ad un punto, al di là del quale comincia a diminuire.

Fig. 7. La curva CDE, Fig.7, la cui equazione è $y=b-cx^2$, ci presenta un esempio di questo caso nel punto D, poichè le ordinate che seguono e precedono immediatamente AD sono minori di essa: dunque l'ordinata AD è un massimo.

92. Vi sono delle curve, le quali non hanno che un massimo, delle altre le quali non hanno che un minimo; alcune hanno l'uno e l'altro; altre non ne sono suscettibili,

Si vede, per esempio, Fig.6 che la curva MDN, la cui equazione è $y=b+cx^2$, non può avere un massimo, poichè, dietro la natura della sua equazione, le ordinate vanno sempre crescendo. Fig. 6.

Il cerchio CBD, Fig. 8 la cui equazione è Fig. 8.

$$a^2=(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2.$$

ha un massimo ed un minimo, che corrispondono alla stessa ascissa AR: il massimo è RD, il minimo RB.

93. Allorchè una funzione y della variabile x ha un massimo ed un minimo; l'uno e l'altro sarebbe determinato, se si conoscesse l'ascissa che vi corrisponde: per esempio, se in una curva che ha per equazione $y=\varphi x$, si conoscesse il valore a dell'ascissa x, che corrisponde al massimo o al minimo, basterebbe di fare $x=a$ nell'equazione $y=\varphi x$, per determinare il valore di y, ch'è il massimo o il minimo domandato.

94. Sia dunque Fig.7 $y=fx$ un'ordinata AD giunta al suo massimo; se l'ascissa A'A riceve un accrescimento h rappresentato da AP', e che prendasi ancora AP''$=h$, si avrà, dietro la condizione che AD sia un massimo Fig. 7.

$$P'M'<AD \qquad P''M''<AD$$

o

$$f(x+h)<fx, \qquad f(x-h)<fx$$

Se al contrario, Fig.6, AD è un minimo, rappresentando per A'A il valore di x che vi corrisponde, e prendendo $Ap'=Ap''=h$, avremo dietro le condizioni del minimo Fig. 6.

$$p'm'>AD \qquad p''m''>AD$$

o

$$f(x+h)>fx \qquad f(x-h)>fx$$

Perciò vi sarà un massimo, quando $f(x+h)$ e $f(x-h)$ sono nello stesso tempo minori di fx; e se sono maggiori, vi sarà un minimo: infine se una di

queste funzioni è maggiore, e l'altra minore di fx, non vi sarà nè massimo, nè minimo.

95. Vediamo dunque in qual caso queste condizioni possono essere adempite: a tal oggetto, abbiamo pel teorema di Taylor

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec. (46)}.$$

Se in questa formola si cambii h in $-h$, si troverà

$$f(x-h)=y-\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.. (47)}.$$

Affinchè $y=fx$ sia un massimo, o un minimo, bisogna che questi due sviluppi siano insieme più grandi, o più piccoli di y; or ciò non può avvenire, a meno che $\frac{dy}{dx}$ non divenga nullo. Infatti se si supponga h picciolissimo, potrassi sempre far in modo che $\frac{dy}{dx}h$ sorpassi la somma algebrica di tutt' i termini che lo seguono: perciò se in questa ipotesi $\frac{dy}{dx}h$ è positivo in uno degli sviluppi (46) e (47), questo sarà maggiore di y, e lo sarà minore, se $\frac{dy}{dx}h$ è negativo. Or il segno che effetta $\frac{dy}{dx}h$ essendo contrario in questi sviluppi, bisogna, che se $\frac{dy}{dx}h$ è positivo in uno di essi, sia negativo nell' altro; d' onde ne segue, che una delle due espressioni $f(x+h)$,

$f(x-h)$ sarà maggiore di fx, per cui l'altra ne sarà minore.

Dunque non potrà esservi massimo o minimo, se $\frac{dy}{dx}h$ non sia nullo; ma se si ha $\frac{dy}{dx}=0$, allora gli sviluppi (46), e (47) si ridurranno respettivamente a

$$f(x+h)=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{cc.}$$

$$f(x-h)=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{cc.}$$

In questo caso, il segno de' termini che seguono y dipenderà da $\frac{d^2y}{dx^2}$, se si prende h tanto piccolo, in modo che questo termine sorpassi la somma di tutti quelli che lo seguono; e come $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha lo stesso segno ne' due sviluppi, ne risulterà che se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, le due funzioni di $(x+h)$ e di $(x-h)$ saranno più grandi di fx; in questo caso fx è un minimo. Similmente se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativo, si vede che fx sarà un massimo.

96. Per rendere compiuta questa teorica, osserveremo, che oltre di $\frac{dy}{dx}=0$, può anche aversi $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; in questo caso non potrà esservi luogo a massimo o

a minimo, se non quando si ha $\frac{d^3y}{dx^3}=0$. Allora il segno delle quantità che seguono y dipenderà da $\frac{d^4y}{dx^4}$, quando si darà ad h un valore piccolissimo; e si proverà che se $\frac{d^4y}{dx^4}$ è positivo, fx sarà un minimo, e sarà un massimo s' è negativo: e così in seguito.

In generale, allorchè il primo coefficiente che non svanisce è di ordine pari, vi è luogo ad un minimo, s' esso è positivo, ed ad un massimo, s' è negativo.

97. Per primo esempio, prendiamo la funzione $a-bx+x^2$; avremo dunque

$$y=a-bx+x^2;$$

differenziando e dividendo per dx, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=-b+2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2.$$

Il valore positivo di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci fa conchiudere che la funzione ha un minimo. Per determinare l'ascissa che corrisponde a questo minimo, si porrà eguale a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, e si avrà $x=\frac{b}{2}$; se questo valore di x si sostituisce in quello di y, si troverà $y=a-\frac{b^2}{4}$ pel minimo richiesto.

98. Sia ancora la funzione $a^4+b^3x-c^2x^2$; differenziando l'equazione $y=a^4+b^3x-c^2x^2$, e dividendo per dx, si troverà

$$\frac{dy}{dx}=b^3-2c^2x\,;\ \frac{d^2y}{dx^2}=-2c^2\,.$$

Avendo $\frac{d^2y}{dx^2}$ un valore negativo, si vede che nella funzione vi è un massimo; L'equazione $b^3-2c^2x=0$ ci da $x=\frac{b^3}{2c^2}$ per l'ascissa che corrisponde a questo massimo, e sostituendo questo valore di x in quello di y, si troverà

$$y=a^4+\frac{b^6}{4c^2}$$

99. Sia ancora l'equazione

$$y=3a^2x^3-b^4x+c^5\,;$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx}=9a^2x^2-b^4\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}=18a^2x\,;$$

eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si avrà

$9a^2x^2-b^4=0$, da cui si ottiene $x=\frac{\pm b^2}{3a}$;

Questi due valori di x, sostituiti successivamente in quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci fanno vedere che nella funzione vi è un massimo, ed un minimo. Il minimo corrisponde all'ascissa $+\frac{b^2}{3a}$, el massimo all'ascissa $-\frac{b^2}{3a}$: mettendo questi due valori in quello di y si troverà

$y = c^3 - \frac{2b^6}{9a}$ pel minimo, ed $y = c^3 + \frac{2b^6}{9a}$ pel massimo.

Applicazione della teoria de' massimi e minimi alla soluzione di diversi problemi.

PROBLEMA I.

100. *Dividere un numero in due parti tali che il prodotto di una per l'altra sia il più grande possibile.*

Sia a questo numero, ed x una delle parti; l'altra sarà $a-x$. Dunque $x(a-x)$ è la quantità, di cui si domanda il massimo: differenziando e dividendo per dx l'equazione $y=x(a-x)=ax-x^2$, troveremo

$$\frac{dy}{dx}=a-2x,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-2$$

Il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci mostra che la funzione effettivamente racchiude un massimo. Se questo coefficiente si fosse trovato positivo, il problema sarebbe stato impossibile. Eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, troveremo $x=\frac{1}{2}a$, il che ci fa vedere che bisogna dividere il numero a in due parti eguali, affinchè il prodotto di esse sia un massimo.

PROBLEMA II.

101. *Fra tutt' i cilindri iscritti in un cono retto, determinar quello che ha il più gran volume.*

Fig. 9. Sia a, Fig. 9, l'altezza SC del cono, b il rag-

gio AC della sua base, ed x la distanza SD del vertice del cono al centro del cilindro. Fig. 9.

I triangoli simili SAC, SED ci daranno

$$SC : AC = SD : ED \text{ , o}$$

$$a : b = x : ED = \frac{bx}{a}$$

Sia $1:\pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza; si sa che il cerchio, il cui raggio è r ha per superficie πr^2; dunque il cerchio EGF, il cui raggio è $\frac{bx}{a}$, avrà per superficie $\frac{\pi b^2}{a^2}x^2$; moltiplicando questa superficie per l'altezza DC del cilindro, cioè per $a-x$, il volume del cilindro avrà per valore $\frac{\pi b^2}{a^2}x^2(a-x)$; sicchè si dovrà differenziare l'equazione

$$y = \frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2 - x^3);$$

da essa se ne deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - 3x^2), \text{ e } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi b^2}{a^2}(2a - 6x);$$

eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - 3x^2) = o \text{, o piuttosto } 2ax - 3x^2 = o,$$

equazione ch'è il prodotto di x, e $2a-3x$, e che perciò da $x=o$, $x=\frac{2}{3}a$; il valore $x=o$ non può corrispondere ad un massimo, poichè in questa ipotesi

$\frac{d^2y}{dx^2}$ riducesi a $\frac{2\pi b^2}{a}$, numero positivo: questo valore indica un minimo; ed infatti quando $x=0$, il cilindro riducesi all'asse del cono (poichè quanto più è alto il cilindro, tanto più è sottile).

Il valore $x=\frac{2a}{3}$ è dunque il solo che possa soddisfare alla quistione; infatti in questa ipotesi $\frac{d^2y}{dx^2}$ riducesi a $-\frac{2\pi b^2}{a}$, numero negativo. Risulta da ciocchè precede, che *il più gran cilindro circoscritto al cono retto, ha per altezza due terze parti di quella del cono.*

PROBLEMA III.

Fig. 8. 102. *Dividere una retta* A'X', *in due parti* A'K, KX', *in modo che il prodotto di* A'K^3. KX' *sia un massimo.*

La retta A'X' rappresentisi con a, e con x la parte A'K di essa, l'equazione del problema sarà

$$y=x^3(a-x);$$

da questa se ne deduce

$$\frac{dy}{dx}=3ax^2-4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=6ax-12x^2;$$

eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si trova $x=0$, ed $x=\frac{3a}{4}$. Questo secondo valore è il solo, che

possa sciogliere il problema, poicchè esso riduce quello di $\frac{dy^2}{dx^2}$ a $-\frac{9a^2}{4}$, risultamento negativo.

103. Osserviamo, che quando nel valore del coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ vi è un fattore costante positivo, può supprimersi. Infatti, se si ha

$$\frac{dy}{dx}=A\phi x,$$

si deduce

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\frac{d\phi x}{dx}.$$

Poicchè questa seconda equazione non ha altr'oggetto, che quello di farci conoscere il segno del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, questo segno non dipende che da quello il quale apparterà a $\frac{d\phi x}{dx}$, poicchè A è un fattore costante positivo; dunque A può esser tolto in questa equazione: Può esser tolto parimente nell'equazione $\frac{dy}{dx}=A\phi x$; poicchè dovendosi eguagliare a zero il secondo membro di questa equazione, per determinare x, l'equazione $A\phi x=0$, darà $\phi x=0$; d'onde segue che si può sempre omettere la costante.

Problema IV.

104. *Si vuol far entrare in un vaso cilindrico una certa quantità di acqua, il cui volume è no-*

to; si domanda quali dimensioni bisogna dare a questo vase, affinchè la sua superficie interna sia la più piccola possibile.

Sia V il dato volume d'acqua, ed x il raggio della base del cilindro; πx^2 sarà l'aja della sua base, e πx^2. alt. cilind, il suo volume; perciò si avrà

$$\text{altez cilind } \pi x^2 = V,$$

da cui si ha

$$\text{altez cilind} = \frac{V}{\pi x^2}:$$

moltiplicando quest' altezza per la circonferenza della base, ch'è $2\pi x$, si avrà

$$\frac{V}{\pi x^2} \cdot 2\pi x = \frac{2V}{x}$$

per la superficie convessa del cilindro. Se a questa si unisce πx^2, ch'è quella della base del cilindro, l'equazione che si dovrà differenziare, sarà

$$y = \frac{2V}{x} + \pi x^2$$

e se ne dedurrà

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4V}{x^3} + 2\pi.$$

Eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)}$$

Si vede che questo valore corrisponde ad un minimo, poichè esso rende positivo quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$: dun-

qui il raggio della base del cilindro cercato sarà $\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)}$. Se questo valore si mette nell' espressione dell' altezza, si troverà per altezza del cilindro.

$$\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}}=\frac{V}{V^{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{\pi^{\frac{2}{3}}}}=\frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)}.$$

** Questo problema è applicabile all' artiglieria; *poichè essendo data una carica di polvere, si può trovare quali dimensioni dovrebbe avere un mortajo a camera cilindrica, affinchè la polvere esercitasse il più piccolo sforzo contro le pareti della camera.*

Si vede che questa quistione si riduce a trovare quale è la più piccola superficie, che possa darsi alla camera del mortajo; e da ciocchè precede, segue che il raggio della camera debba essere eguale alla sua altezza **

PROBLEMA V.

105. *Tra tutt' i coni iscritti in una sfera, determinar quello, che ha una più grande superficie convessa.*

Supponiamo che il semicerchio CMX, Fig. 8., faccia una rivoluzione intorno dell' asse CX, la corda CM genererà un cono, la cui altezza sarà CP, ed MP il raggio della base.

Fig. 8

La superficie convessa di questo cono avrà per espressione 2π PM. $\frac{1}{2}$ CM $= \pi$ PM. CM. Dunque non si tratta che di determinare PM e CM. A tal oggetto siano CX $= a$, CP $= x$; essendo MP media proporzionale tra CP, e PX, si ha

$$PM=\sqrt{x(2a-x)}=\sqrt{(2ax-x^2)}=$$

E similmente essendo CM media proporzionale tra CX e CP, si avrà

$$CM=\sqrt{2ax};$$

e perciò

superf.conves. del cono $=\pi\sqrt{(2ax-x^2)}.\sqrt{2ax}$
$=\pi\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}$;

dunque l' equazione che si dee differenziare è (art 102).

$$y=\pi\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)};$$

dalla quale se ne deduce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4a^2x-3ax^2}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}} \dots (48).$$

Eguagliando questo valore a zero, si avrà

$$4a^2x-3ax^2=0\text{ , o }ax(4a-3x)=0,$$

equazione che resta soddisfatta da $x=0$; e da $x=\frac{4a}{3}$.

Il primo di questi due valori non può appartenere che ad un minimo. Non vi è dunque che il valore $x=\frac{4a}{3}$ che possa soddisfare alla quistione, ciocchè sarà confermato dal segno di $\frac{d^2y}{dx^2}$.

106. Prima di determinare il valore di questo coefficiente differenziale, vado a mettere in veduta un metodo che in alcuni casi abbrevierà i calcoli.

Osserverò primieramente, che quando una funzione di x divien nulla per un dato valore della variabile x, in generale non può conchiudersi che anche il suo coefficiente differenziale sia nullo: per esempio, se si ha la funzione x^2-5x+6, che diviene nulla, allorchè $x=2$, o $x=3$, il coefficiente differenziale di que-

sta funzione, ch' è $ax+5$, non diviene sicuramente nullo nelle stesse ipotesi.

107. Si possono qualchevolta abbreviare di molto le operazioni che s' impiegano per riconoscere se una funzione sia suscettibile di massimo o di minimo. In fatti, supponendo che si voglia determinare il coefficiente differenziale dell' equazione $y=XX'$, nella quale X, ed X' sieno funzioni di x, di cui la prima solamente diviene nulla dietro un dato valore di x, differenziando questa equazione (art. 14), e dividendo per dx, si avrà:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{XdX'}{dx}+\frac{X'dX}{dx}$$

ed essendo, per ipotesi X=o pel dato valore di x, questa equazione si ridurrà a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{X'dX}{dx}.$$

Da ciò si conchiude che per ottenere $\frac{d^2y}{dx^2}$, bisogna moltiplicare il coefficiente differenziale del fattore nullo per l' altro fattore *.

* Questa regola non è senza eccezione, poicchè $\frac{dX}{dx}$ può essere anche nullo. Per esempio se si avesse $\frac{dy}{dx}=x^3(x-a)^2$, equazione che ha radici eguali, i due termini del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarebbero nulli, ed invece di sopprimere il fattore rappresentato da $X\frac{dX'}{dx}$

108. Per esempio se si vuol ottenere il coefficiente differenziale del secondo ordine di $\frac{x-a}{\sqrt{x}}$ nell' ipotesi di $x=1$, si farà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}.(x-a), \text{ e}$$

si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}.\,d\frac{(x-a)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

109. Riprendiamo ora l'equazione (48), dalla quale si vuol avere il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, nell' ipotesi di $x=\frac{4a}{3}$: decomponendo il numeratore ne' suoi fattori si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{ax(4a-3x)}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}=\frac{ax}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}\right).(4a-3x);$$

nell' ipotesi attuale, essendo nullo il fattore $(4a-3x)$, si avrà (art. 107).

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ax}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax)^3}}.\frac{d(4a-3x)}{dx}=\frac{-3ax}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}$$

---

si dovrebbe, art. 96, ricorrere a' coefficienti differenziali degli ordini superiori, per riconoscere se la funzione è suscettibile di un massimo, o di un minimo; se $\frac{dX'}{dx}$ fosse infinito, s' incontrerebbe il caso dell' art. 87.

e per conseguenza, dividendo i due termini della frazione per x

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3a}{\sqrt{(4a^2-2ax)}}:$$

mettendo in questa equazione il valore di x ch' è $\frac{4a}{3}$, si otterrà in fine

$$\frac{dy^2}{dx^2}=-\frac{3a}{(\sqrt{4a^2-\frac{8a^2}{3}})}=-\frac{3a}{\sqrt{\frac{4a^2}{3}}}$$

Questo valore essendo negativo, quello di x corrisponde ad un massimo.

PROBLEMA VI.

110. *Dato un punto* (Fig. 10) *E tra' lati dell' angolo* YAX, *si domanda di far passare per questo punto una retta* CB, *tale, che, incontrando gli assi* AX, AY, *ne' punti* B, C, *sia* CB *un minimo.* Fig. 10

Sia $AI=a$, $IE=b$, $IB=x$; i triangoli rettangoli IEB, ACB, ci danno

$$IB:IE=AB:AC, \text{ o } x:b=a+x:AC;$$

dunque sarà

$$AC=b\,\frac{a+x}{x},$$

e perciò

$$AC^2=\frac{b^2}{x^2}(a+x)^2;$$

si ha dippiù

$$\overline{AB}^2=(a+x)^2;$$

dunque sostituendo questi valori nella formola

$$BC=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)}$$

Fig. 10 si avrà

$$BC=\sqrt{[(\frac{b^2}{x^2}+1)(a+x)^2]}=\sqrt{[(\frac{b^2+x^2}{x^2})(a+x)^2]}$$
$$=\frac{a+x}{x}\sqrt{(b^2+x^2)}=y.$$

Riguardando questa espressione come il prodotto del fattore $\frac{a+x}{x}$ per l'altro $\sqrt{(b^2+x^2)}$, si differenzierà colle regole dell' art. 14; e si troverà

$$dy=\frac{a+x}{x}\,d\sqrt{(b^2+x^2)}+\sqrt{(b^2+x^2)}\,d\frac{a+x}{x}=$$
$$\frac{(a+x)}{x}\,\frac{xdx}{\sqrt{(b^2+x^2)}}+\sqrt{(b^2+x^2)}\,.-\frac{adx}{x^2},$$

riducendo allo stesso denominatore, e moltiplicando i due termini della prima frazione per x, ed i due termini della seconda per $\sqrt{(b^2+x^2)}$, si offerrà

$$dy=\frac{(a+x)}{x^2}\,\frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2+x^2)}}+\frac{b^2+x^2}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}}\,.-adx;$$

riunendo, e riducendo i termini del numeratore, e dividendo per dx, ne verrà infine

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-ab^2}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}};$$

eguagliando a zero il numeratore, si ha

$$x=\sqrt[3]{(ab^2)}.$$

Per dimostrare che questo valore corrisponde ad un minimo; metteremo solamente, art. 107, invece del numeratore ch' è il fattore nullo, il suo coefficiente differenziale, è così avremo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3x^2}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}}=\frac{3}{\sqrt{(b^2+x^2)}},$$ Fig. 10

valore essenzialmente positivo, poichè i quadrati b^2, ed x^2 sono sempre positivi.

Problema VII.

111. *Trovare il più gran triangolo rettangolo, che possa costruirsi su di una data retta.*

Sia $DB=a$ la retta data, Fig. 10, x uno de' lati del triangolo, l'altro sarà $\sqrt{(a^2-x^2)}$; quindi la superficie del triangolo avrà per espressione

$$\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}:$$

perciò l'equazione del problema sarà art. 103.

$$y=x\sqrt{(a^2-x^2)}=\sqrt{(a^2x^2-x^4)}:$$

da questa se ne dedurrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2x-2x^3}{\sqrt{(a^2x^2-x^4)}}.$$

Facendo $a^2x-2x^3=0$, o $x(a^2-2x^2)=0$, si avrà $x=0$, e perciò $2x^2=a^2$. Non potendo x essere nullo, è chiaro che questo solo secondo valore convenga al problema; perciò i due catetti CD, CB saranno eguali; differenziando il fattore a^2-2x^2, si avrà, art 107.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{\sqrt{(a^2x^2-x^4)}}\cdot\frac{d(a^2-2x^2)}{dx}=-\frac{4x^2}{\sqrt{(a^2x^2-x^4)}}.$$

Questo risultamento essendo negativo, l'ipotesi di $a^2-2x^2=0$, da per x un valore che corrisponde ad un massimo.

Della significazione geometrica de' coefficienti differenziali.

112. Si è veduto, art. 71, che $\frac{dy}{dx}$ rappresentava la tangente trigonometrica dell'angolo che fa coll'asse della x, una tangente tirata per un punto di una curva in cui le coordinate sono x, y. Come questa verità è il fondamento della teorica, che segue, essa può esser dimostrata *a priori* nel seguente modo.

Fig. 3. Siano (Fig. 3) PM$=y$, PP'$=h$; menando la parallela MQ all'asse delle ascisse, si avrà

$$M'P'=f(x+h):$$

$$M'Q=f(x+h)-fx=\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc.};$$

or

$$MQ : M'Q = 1 : \text{tang}\, S=\frac{M'Q}{MQ},$$

e mettendo per M'Q, MQ i di loro rispettivi valori si avrà

$$\text{tang}S=\frac{\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ec.}}{h}=\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1.2}+\text{ecc.}$$

Passando al limite, h è nullo, e tang S si cambia in tang T.

Dunque in tal caso si avrà

$$\text{tang}T=\frac{dy}{dx}.$$

Ciò posto, se PM diviene un massimo, come AD (Fig. 8), la tangente divenendo parallela all'asse delle ascisse, come DT, non farà angolo con questo as-

se, e come si ha $\tan g(MT, x) = \frac{dy}{dx}$ (Fig. 3), si avrà (Fig. 8.) $\tan g(DT, x) = \frac{dy}{dx} = 0$.

Similmente si dimostrarebbe che, se PM fosse un minimo, la tangente trigonometrica, divenendo parimenti nulla, dovrebbe aversi $\frac{dy}{dx} = 0$. Fig. 3

Perciò la frazione $\frac{dy}{dx}$ non esprime altro che la condizione del parallelismo della tangente in D (Fig. 6, ed 8) all'asse delle ascisse. Fig 6. ed 8.

113. Esaminiamo ora in quale circostanza la frazione $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positiva o negativa. A tal effetto consideriamo parimente il caso, in cui la curva volge la sua convessità all'asse delle ascisse (Fig. 6).

Siano $A'A = x$, $AD = y$, $Ap' = p'q' = h$; e pe' punti D, ed m' tirinsi la segante $Dm'S$, e le rette DK, $m'K$ paralelle all'asse delle ascisse; si avrà Fig. 6.

$$m'o = m'p' - DA = f(x+h) - fx,$$

cioè

$$m'o = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ecc.};$$

Or la simiglianza de' triangoli $Dm'o$, DSK ci da

$$Do : DK = m'o : SK,$$

$$h : 2h = m'o : SK = 2m'o;$$

e sostituendo ad $m'o$ il suo valore, si ha

$$SK = 2\frac{dy}{dx}h + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ecc.}$$

Da un' altra parte si ha

$$n'q' = f(x+2h);$$

sicchè sarà $n'K = n'q' - DA = f(x+2h) - fx =$

$$\frac{dy}{dx}2h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{ecc.};$$

e perciò

$$n'S = n'K - SK = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{ec.} \ldots\ldots (49).$$

Fig. 7 Nel caso in cui la curva volge la sua concavità all' asse delle ascisse (Fig. 7), per avere $n'S$, bisognerà al contrario dal valore di SK, toglierne $n'K$, ciocchè darà

$$n'S = SK - n'K = -\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{ecc.} \ldots (50).$$

Paragonando i valori (49), e (50) di $n'S$, si vede che nel primo, $\frac{d^2y}{dx^2}$ è preceduto dal segno $+$, e nell' altro dal segno $-$.

Ciò posto, può farsi in modo, che dal segno del primo termine dello sviluppo di $n'S$ dipenda quello di tutto questo sviluppo, e come il quadrato h^2, ch' è essenzialmente positivo, non può influire sul segno di $\frac{d^2y}{dx^2}h^2$, quello che solamente potrà decidere del segno di $n'S$, sarà il coefficiente differenziale $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Sicchè esaminando l'equazioni (49), e (50) solamente rispetto a' segni, si potrà sopprimere h^2, ed i termini che seguono $\frac{d^2y}{dx^2}$, e quest' equazioni diverranno rispettivamente

$$\text{(Fig.6)}\ n'S = +\frac{d^2y}{dx^2}\ ;\ \text{(Fig. 7)}\ n'S = -\frac{d^2y}{dx^2}\ ;$$ Fig. 6

da cui si ha (Fig.6)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +n'S \ldots (51)\ ;\ \text{(Fig.7)}\ \frac{d^2y}{dx^2} = -n'S \ldots (52).$$

Se y si riguarda come una quantità positiva, $n'S$, Fig. 6, prendendosi per lo stesso verso di y, sarà positivo; sicchè l'equazione (51) ci fa vedere, che $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, quando la curva volge la sua convessità all' asse delle scisse.

Se poi si considera l'equazione (52), e la Fig. 7, che la riguarda, si vedrà che $-n'S$ rappresenta una retta presa in un verso opposto a quello di y, il che fa sì che $\frac{d^2y}{dx^2}$, è negativo, e che perciò in questo caso la curva volti la sua concavità all' asse delle ascisse.

114. Si è supposto finora la curva situata al disopra dell' asse delle ascisse: esaminiamo ciocchè accade, allorchè essa si stende al disotto, come nella (Fig.26). Egli è chiaro, da ciocchè precede, che, poicchè la curva rivolge in M la sua convessità verso l'asse delle ascisse, $\frac{d^2y}{dx^2}$, e perciò MN è positi- Fig.26

vo; or le rette MN, M'N', che sono situate dalla stessa parte della tangente TT', debbono avere lo stesso segno, e come MN è positivo, M'N' dee esserlo ancora; d'onde segue che al punto M', ove la curva volge la sua concàvità verso l'asse della ascisse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ avrà un segno contrario a quello dell'ordinata P'M', ch'è negativa; la curva volgerebbe, al contrario, la sua convessità, se y e $\frac{d^2x}{dx^2}$ avessero lo stesso segno. In guisa che può dirsi in generale che da qualunque parte cada la curva, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha lo stesso segno di y, allorchè la curva volge la sua convessità all'asse delle ascisse, e prende un segno contrario, allorchè vi volta la concavità. La curva volgendo la sua convessità, e la sua concavità all'asse delle ascisse, secondochè l'ordinata è giunta al suo massimo, o minimo, si conosce perchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo nel primo caso, e negativo nel secondo.

115. Può esservi ancora un massimo o un minimo, allorchè si ha $\frac{dy}{dx}=\infty$. Per dimostrare ciocchè significa questa condizione, sia $y=fx$ l'equazione di Fig. 8. una curva MN, (Fig. 8); egli è certo che se si da ad x un valore AP, questa equazione determinerà l'ordinata PM.

Se in seguito si scioglie l'equazione per rispetto ad x, e che si ottenga $x=\varphi y$; egli è chiaro che se si farà $y=AP'$ (valore precedente di y), l'equazione darà $x=P'M$. In quest' ultimo caso, y sarà considerata come l'ascissa, ed x come l'ordinata,

e si costruirà la stessa curva, purchè le ascisse y si prendano sull' asse A'Y, e che l' altro asse sia riguardato come quello delle ordinate.

In questa ipotesi, si può cercare il massimo, o il minimo della funzione x di y. A tal oggetto si otterrà dall' equazione proposta $\frac{dx}{dy}=M$, e si supporrà $M=0$: ciò posto l' equazione $\frac{dx}{dy}=M$ ci da $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{M}=\frac{1}{0}=\infty$; sicchè la condizione necessaria, affinchè vi sia luogo al massimo, o al minimo nel senso delle ascisse è $\frac{dy}{dx}=\infty$.

116. Per esempio, se si prendesse l' equazione

$$y^2=ax-b$$

se ne otterrebbe $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}$: eguagliando a zero questo valore, si ha $y=\infty$; dunque la curva non può avere un massimo nel senso delle ordinate, che ad una distanza infinita dall' asse delle ascisse. Esaminiamo ora, se essa ha un limite nel senso delle ascisse (in generale s' intende per limite il massimo o il minimo). A tal oggetto bisogna supporre infinito il valore di $\frac{dy}{dx}$, ciocchè da $\frac{a}{2y}=\infty$, condizione che rimane adempita quando si fa $y=0$: in questa ipotesi il valore di $\frac{d^2x}{dy^2}$ si riduce a $\frac{2}{a}$ risultamento positivo.

Si vede dunque che il valore di $y=0$ corrisponde ad un minimo di x. Questo si determinerà facendo $y=0$ nell'equazione proposta, ipotesi, che la ridurrà a

$ax-b=0$, d'onde ne dedurremo $x=\frac{b}{a}$, che sarà il

minimo richiesto. Questo minimo è rappresentato da Fig. 8 AX Fig. 8, che sarà la minima di tutte le x rispetto alla curva HXH'.

117. Terminando questa materia, osserveremo che

l'equazione $\frac{dy}{dx}=\infty$ c'indica che la tangente XK'

appartiene ad un angolo retto, e perciò è perpendicolare all'asse delle x.

Considerazioni generali sopra i punti singolari delle curve.

118. Il calcolo differenziale può essere di una grande utilità, per trovare la forma di una curva, di cui è data l'equazione. La teorica de' massimi e minimi ci offre i mezzi di determinare i limiti nel senso delle ascisse, ed in quello delle ordinate; ma ciò non basterebbe per farci riconoscere la forma della curva. Per esempio le curve delle figure (27) (28) e (29), che hanno gli stessi limiti OC, OD nel senso delle ordinate, ed OA, OB in quello delle ascisse, non si rassomigliano. Ciocchè distingue la curva (Fig. 27) dall'altra (Fig. 28), è che in quest'ultima non vi è che un sol punto d'inflessione: chiamasi così quel punto, ove la curva da concava diviene convessa, o da convessa concava. Nella curva (Fig. 27) vi sono due punti d'inflessione, uno in E, l'altro in G, ed un punto di regresso in C, cioè

un punto, ove la curva sospende tutto ad un tratto il suo corso.

119. In generale, i punti ove la curva soffre de' cambiamenti, chiamansi *punti singolari*: si vede che se si ha il mezzo di conoscere i luoghi, ne' quali questi punti esistono, sarà facile di seguir la curva nel suo corso. Per esempio, se si sapesse che la curva (Fig. 29) ha de' punti d'inflessione in E ed in H, e de' punti di regresso in F, e G, si potrebbe prendere un' idea di questa curva per mezzo dell' analisi seguente.

Fig. 29

Partendo dal punto A, ch' è un limite nel senso delle ascisse, la curva volge sul principio la sua concavità verso l' asse delle ascisse fino ad E, ove esiste un punto d' inflessione, che da concava la fa divenire convessa. All' estremità F della parte convessa EF, essa sospende il suo corso al punto di regresso F, al di là del quale essa è ancora convessa nella parte FH, per tornare ad esser concava al di là del punto d' inflessione H; e continuare così fino al punto C, ch' è un limite nel senso delle ordinate: infine da C, e da A fino a G, la curva è composta di due archi CBG, ADG, che volgendo le loro concavità all' asse delle ascisse si riuniscono in un punto di regresso, e passano pe' due limiti B, D, l' uno nel senso delle ascisse, e l' altro delle ordinate.

120. Da ciocchè precede, si vede quanto sarebbe vantaggioso di potere, per mezzo dell' equazione di una curva, determinare le coordinate de' punti singolari: si è già fatto conoscere il metodo di determinare i massimi e minimi: non resta che ad occuparci della ricerca degli altri punti singolari; ciocchè diverrà il soggetto de' paragrafi seguenti.

De' punti d' inflessione.

121. Abbiamo veduto che un punto d' inflessione è quello, nel quale la curva da convessa diviene

concava, o da concava convessa. La curva M'MM''

Fig.30 (Fig. 30) ci offre in M un punto di questo genere. Tirisi per questo punto una tangente TT' : se consideriamo le diverse ordinate comprese tra M'P', ed MP, osserveremo che il prolungamento M'N' dell'ordinata fino alla curva, andrà diminuendo a proporzione che si avvicina ad M, ove svanirà; se esaminiamo le seguenti ordinate, il prolungamento M''N'' dell'ordinata cadrà al di sotto della tangente, e per conseguenza cambierà di segno, in modochè se M'N' era positivo, M''N'' sarà negativo. Questa è la condizione che andremo ad esprimere con una equazione.

Sia dunque, (Fig. 30) PP'$=h=$PP''; si ha evidentemente

$$M'N'=M'P'-N'P',$$

$$M'N'=f(x+h)-N'P' \quad \ldots (54):$$

Per determinare il valore analitico di N'P' si ha

$$N'P'=MP+N'O,$$

ossia

$$N'P'=y+N'O \quad \ldots (55).$$

Rispetto al valore di N'O, il triangolo rettangolo N'MO ci da

$$N'O=MO \; tang \; N'MO;$$

Or si è veduto, art. 71, che l'angolo N'MO, formato dalla tangente in M con una paralella all' asse delle ascisse, avea $\frac{dy}{dx}$ per tangente trigonometrica; per conseguenza rimpiazzando *tang* N'MO con $\frac{dy}{dx}$, e mettendo h in luogo di MO, avremo

$$N'O=h\frac{dy}{dx}:$$

Sostituendo questo valore nell' equazione (55), e mettendo in seguito quello di N'P' nell'equazione (54), si avrà Fig.56

$$M'N' = f(x+h) - y - \frac{dy}{dx} h \ldots (56).$$

Senz' aver bisogno di calcolar di nuovo il valore di M''N'', possiamo dedurlo da quello di M'N'; infatti se l' ordinata suppongasi ritrocedere paralellamente a se stessa, M'N' diverrà M''N'', allorchè h si cambierà in $-h$: dunque supponendo h negativa nell'equazione (56), si avrà

$$M''N'' = f(x-h) - y + \frac{dy}{dx} h \ldots (57).$$

Mettiamo ora in luogo di $f(x+h)$, e di $f(x-h)$, i loro rispettivi sviluppi, si avrà

$$M'N' = \left(y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \text{ecc.}\right)$$

$$- y - \frac{dy}{dx} h,$$

$$M''N'' = \left(y - \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \text{ec.}\right)$$

$$- y + \frac{dy}{dx} h,$$

e riducendo, quest' equazioni diverranno

$$M'N' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \text{ec.} \ldots (58)$$

$$M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \text{ec.} \ldots (59).$$

Fig. 30 Ciò posto, acciocchè in M vi sia un' inflessione, bisogna necessariamente, che, dando ad h un piccolissimo valore, le linee M'N' ed M"N" cadauno una sopra, e l'altra sotto della retta TT', il che esige che M'N', ed M"N" abbiano segni contrarii: or ciò non è possibile, se non quando il primo termine

$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}$ delle serie (58), e (59) è nullo. Infatti, se ciò non fosse, si potrebbe dare ad h un valore picciolissimo, in modo che il termine $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}$ sorpassasse la somma algebrica di tutti gli altri termini della serie; in questo caso il segno di questo termine deciderebbe di quello di tutta la serie; e come un tal termine è lo stesso nelle due serie, ne risulterebbe che M'N', M"N" avrebbero necessariamente lo stesso segno; per conseguenza la condizione che M'N', M"N" abbiano diversi segni esige che si abbia

$$\frac{d^2y}{dx^2}h^2=0;\ \text{ò piuttosto}\ \frac{d^2y}{dx^2}=0$$

122. Se avvenisse che lo stesso valore di x, pel quale $\frac{d^2y}{dx^2}$ diviene zero, facesse anche svanire $\frac{d^3y}{dx^3}$, bisognarebbe che $\frac{d^4y}{dx^4}$ fosse anche nullo, per darsi luogo ad un punto d' inflessione. E se $\frac{d^5y}{dx^5}$ fosse nullo, dovrebbe anche svanire $\frac{d^6y}{dx^6}$, e così in seguito; in guisa che dovrebbe essere di ordine pari

l' ultimo coefficiente differenziale che dovrebbe svanire.

123. Se il valore x, ch'è lo stesso negli sviluppi (58) e (59), fosse tale da rendere $\frac{d^2y}{dx^2}$ infinito, tali sarebbero ancora questi due sviluppi; ed allora niente si potrebbe conchiudere dalla dimostrazione precedente, che riposa sulla possibilità degli sviluppi medesimi: in questo caso bisogna osservare che la condizione $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ c' indica generalmente, che $\frac{d^2y}{dx^2}$ dee cambiar di segno al punto d' inflessione, ciocchè si accorda coll' art. 113: ma $\frac{d^2y}{dx^2}$ può benanche cambiar di segno, passando per l' infinito. Per darne un esempio, sia

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^2}{x-a}.$$

Se si faccia successivamente

$$\left.\begin{array}{l} x=a-h \\ x=a \\ x=a+h \end{array}\right\} \text{si avrà} \quad \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{h} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=\infty \\ \frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{b^2}{h}; \end{array}$$

E si vede che il denominatore del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ è quello che fa cambiare di segno al coefficiente differenziale, dopo il punto d' inflessione.

124. Da ciocchè precede risulta, che per potersi avere un punto d'inflessione in una curva, bisogna che il valore dell'ascissa di questo punto faccia verificare una delle due seguenti equazioni

$$\frac{dy^2}{dx^2}=0, \frac{d^2y}{dx^2}=\infty.$$

Allorchè saremo sicuri, che una di queste due condizioni ha luogo, l'ascissa del punto, che fa sussistere una di esse, si aumenterà, o si diminuirà successivamente di una quantità picciolissima h; e se $\frac{d^2y}{dx^2}$ acquista valori di segno contrario per mezzo di questi nuovi valori di x, bisognerà conchiudere che vi è un punto d'inflessione; poicchè, allorchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, la curva volge la sua convessità verso l'asse delle ascisse, mentre che, quando $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativo, la curva volge la sua concavità verso lo stesso asse; ora è appunto per questo cambiamento di convessa in concava, o di concava in convessa, che la curva manifesta il suo punto d'inflessione.

125. Per dare un'applicazione di questa teorica, cerchiamo, se vi è un punto d'inflessione nella curva che ha per equazione

$$y=b+2(x-a)^3 \ldots (60):$$

La differenziazione ci da

$$\frac{dy}{dx}=3.2\,(x-a)^2,\ \frac{d^2y}{dx^2}=12(x-a),\ \frac{d^3y}{dx^3}=12.$$

La condizione di un punto d'inflessione richiede che vi sia un valore di x, che renda nullo il termine $\frac{d^2y}{dx^2}$: or essendo x una quantità variabile, determiniamo uno de' suoi valori per mezzo della condizione $12(x-a)=0$; Si otterrà $x=a$ per l' ascissa che può appartenere ad un punto d' inflessione. Per assicurarci dell'esistenza di questo punto, diminuiscasi l'ascissa (Fig. 31) a di una piccola quantità h, e sostituiscasi $a-h$ ad x, si troverà che pel punto M' segnato dall' ascissa $a-h$, si ha $\frac{d^2y}{dx^2}=-12h$; in seguito mettasi $a+h$ in luogo di x ; e si troverà che il punto M'' segnato dall' ascissa $a+h$, corrisponde a $\frac{d^2y}{dx^2}=12h$. Questi due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ di segno differente ci mostrano che vi è in M un punto d' inflessione.

Fig. 31

L' ipotesi di $x=a$ fa svanire $\frac{dy}{dx}$; per conseguenza la tangente al punto d' inflessione è paralella all' asse della x.

126. Bisogna osservare che non sempre si è nel caso di eguagliare a zero il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$: per esempio, se si volesse esaminare, se vi siano punti d' inflessione nella curva che ha per equazione

$$y=b+ax^2,$$

si troverebbe per mezzo della differenziazione

$$\frac{dy}{dx}=2ax,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2a:$$

Or si vede che il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ non può farsi eguale a zero, perchè essa non racchiude alcuna quantità indeterminata, e perciò la curva non può avere un punto d'inflessione; questo risultamento per altro era facile a prevedersi, essendo la curva una parabola. Il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci mostra solamente che questa parabola volge continuamente la sua convessità verso l'asse delle ascisse.

127. Per terza applicazione, prendiamo l'equazione

$$y^3=x^5;$$

risolvendola per rispetto ad y; ed in seguito differenziando, si ha

$$y=x^{\frac{5}{3}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Se si cercasse determinare x per mezzo dell'equazione

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0\,,\quad \text{o piuttosto}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0,$$

non si potrebbe soddisfare a questa equazione, che facendo $x=\infty$, ciocchè non condurrebbe ad alcuna conseguenza; ma come possiamo fare benanche $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$, si soddisferà all'equazione $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$ col fare $x=0$, questo valore di x ci fa comprendere che può esservi un punto d'inflessione all'origine: e per assicurar-

ci dell' esistenza di questo punto, sostituiremo successivamente ad x i valori $x=0+h$, ed $x=0-h$, cioè h, e $-h$, e vedremo se in questi due casi $\frac{d^2y}{dx^2}$ dà de' risultamenti di segno contrario. Ma invece di fare queste operazioni l'una dopo l'altra, le potremo fare nel tempo stesso, sostituendo ad x la quantità $\pm h$; allora il coefficiente differenziale del secondo ordine diverrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{5}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}.$$

Il valore superiore si riferisce ad un' ascissa maggiore di quella del punto d'inflessione, el valore inferiore si rapporta ad un'ascissa minore. Come questi due valori hanno segno contrario, noi possiamo conchiudere che x corrisponde ad un punto d'inflessione A (Fig. 32). Fig. 32.

128. Per ultima applicazione, prendiamo la curva che ha per equazione

$$(y-b)^2 = x^3:$$

Questa equazione ci dà

$$y = b \pm x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{2}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}:$$

Facendo $x=0$, si ha $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, ciocchè indica che può esservi un punto d' inflessione all' origine. Per sapere se questo punto esiste, facciasi in primo luogo $x = h$, e sostituiscasi questo valore in quello di

$\frac{d^2y}{dx^2}$, il quale diviene

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Se si fa in seguito $x=-h$, il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ diviene imaginario, come quello di y, ciocchè dimostra che ad ascisse negative non vi corrisponde curva; perciò benchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ sia infinito all' origine, non vi è affatto punto d' inflessione. Da quì a poco ci sarà facile di conoscere che l' origine C (Fig. 33) appartiene ad una classe di punti che sono stati compresi sotto il nome de' punti di *rigresso*: noi anderemo a prendere ciò più particolarmente in considerazione nel paragrafo seguente.

Fig. 33

De' punti di regresso.

129. Allorchè una curva si arresta nel suo corso, e torna indietro, si ha un punto di regresso; il regresso è della prima specie, allorchè i due rami si volgono le loro convessità, come nella figura (33); ed essa è della seconda specie, allorchè le concavità sono concentriche come nella Fig. (34).

Fig. 33

130. La curva si arresta così, perchè al di là del punto C di regresso, i valori che si danno all' ascissa, ne determinano degl' imaginarii per l' ordinata, ciocchè suppone che $\frac{d^2y}{dx^2}$ racchiude un radicale; e se, primacchè la curva sospende il suo corso, $\frac{d^2y}{dx^2}$ da due valori, uno dello stesso segno di y, e l' al-

fro di segno contrario, ciò dimostra che vi sono due rami (Fig. 33) di curva riuniti al punto C, l'uno convesso verso l'asse delle ascisse, e l'altro concavo. Con questi caratteri si può riconoscere un punto di regresso della prima specie: al contrario se i due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ hanno lo stesso segno, i due rami che si uniscono in C (Fig. 34) non possono essere che concentrici: per conseguenza in questo caso il regresso sarà della seconda specie.

131. Per primo esempio, esaminiamo se vi sono punti di regresso nella curva che ha per equazione.

$$(y-x)^2=x^9.$$

Questa equazione da

$$y=x+x^4\sqrt{x}\ldots(61).$$

Si vede che allorchè si prende x negativo, y diviene imaginario; dunque la curva si arresta all' origine, ove si ha $x=0$ ed $y=0$; ma ciò non dimostra ancora che nell' origine vi sia un punto di regresso, poichè potrebbe non esservi in questo punto, che un arco di curva sempre concavo verso la stessa parte, come ha luogo al vertice dell' iperbole; perciò per conoscere se il valore di $x=0$ corrisponde ad un punto di regresso, bisogna sapere ciocchè diviene presso all' origine il coefficiente differenziale di second' ordine; or differenziando, e dividendo per dx la equazione

$$y=x\pm x^{\frac{9}{2}},\text{ si ha}$$

$$\frac{dy}{dx}=1\pm\frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}\ldots(62).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}=\pm\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}x^2\sqrt{(x)}.$$

Per sapere se la curva è concava o convessa accanto al punto, ove sospende il suo corso, si aumenterà l'ascissa di questo punto di una piccola quantità h, con fare $x=0+h=h$, e con sostituire questo valore in quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$; si troverà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}h^2\sqrt{h}:$$

Questi due valori di segno contrario indicano di esservi due rami; uno AM (Fig. 35), che volge la sua convessità verso l'asse delle ascisse, e l'altro AN, che volge verso lo stesso asse la sua concavità; per conseguenza l'origine è un punto di regresso della prima specie.

Fig.35

132. Per secondo esempio, prendiamo l'equazione

$$(y-b)^2=(x-a)^3:$$

questa equazione ci da

$$y=b\pm\sqrt{(x-a)^3}\ \ldots (63).$$

Se si fa $x=a$, si trova $y=b$; ma se si danno ad x due valori minori di a, quelli di y diverranno imaginarii, poichè mettendo $a+h$ in luogo di x, si trova

$$y=b\pm\sqrt{(-h^3)}=b\pm h\sqrt{(-h)},$$

valore imaginario: dunque la curva sospende il suo corso al punto C (Fig. 33), le cui coordinate sono a, e b.

Fig.33.

Per conoscere in qual modo i suoi rami si distendono al di là del punto C, sostituiscasi ad x il valore $a+h$ in quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$, si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{h}}.$$ Fig. 33.

Il segno superiore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ c' indica un ramo CM, che volge la sua convessità verso l' asse delle ascisse, el segno inferiore indica un ramo CN, che volge la sua concavità verso lo stesso asse: dunque vi esiste nel punto C un punto di regresso della prima specie.

133. Per terzo esempio, prendiamo la curva, la cui equazione è

$$y = ax^2 \pm bx^2\sqrt{x}.$$

Se si fa $x=0$, si trova $y=0$; ma ad x negativo corrisponde un valore di y imaginario; dunque la curva sospende il suo corso all' origine; esaminiamo ciocchè diviene allora $\frac{d^2y}{dx^2}$. A tal oggetto, scrivendo l' equazione della curva nella maniera seguente

$$y = ax^2 \pm b\,x^{\frac{5}{2}},$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \pm \frac{5}{2}b\,x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}b\sqrt{x};$$

dando ad x un valor positivo picciolissimo rappresentato da h, la parte $\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}b\sqrt{h}$ del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà minore dell' altra $2a$: per conseguenza i due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ dati dall' equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} b\sqrt{h},$$

saranno positivi; d'onde ne segue che all'origine vi saranno due rami, i quali volgeranno la loro curvatura verso l'asse della x. Vi è dunque nell'origine un punto di regresso della seconda specie.

134. I punti di regresso appartengono ad una classe di punti conosciuti sotto il nome di *punti multiplici*.

De' punti multiplici.

135. Si chiamano *punti multiplici* i punti, ne' quali si riuniscono molti rami di curva. Un punto multiplice è doppio, allorchè esso è all'intersezione di due rami; è triplo, allorchè trovasi all'intersezione di tre rami; e così in seguito.

Fig. 36 136. Sia A (Fig. 36) un punto doppio formato da due rami di curva AB, AC, a' quali siensi menate le tangenti AT, AT'. Se rappresentiamo con $F(x, y) = 0$ l'equazione della curva sgombra di radicali, il differenziale di questa espressione, messo sotto questa forma $Pdx + Qdy = 0$, non comprenderà alcun radicale, perchè la differenziazione di una funzione razionale non ne introduce punto in questa funzione; d'onde segue che P e Q saranno quantità razionali.

Ciò posto l'equazione precedente ci da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \quad \dots \quad (64).$$

Poichè $\frac{dy}{dx}$ dee avere due valori differenti, giacchè vi sono due tangenti, bisogna che $\frac{P}{Q}$ si de-

termini in modo che abbia luogo questa condizione: essa avrebbe luogo, se $\frac{P}{Q}$ racchiudesse un radicale; ma ciò è una cosa impossibile, poicchè abbiamo veduto che $\frac{P}{Q}$ era razionale; in questo caso bisogna che l'Algebra ci guidi ad un risultamento, che eviti questa contradizione, ed è ciò che ha luogo, allorchè $\frac{P}{Q}$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, perchè sappiamo che $\frac{0}{0}$ è il simbolo di una quantità indeterminata, e per conseguenza suscettibile di più valori.

137. Ecco in qual modo si dimostra questo teorema. Supponiamo per un istante che α ed α' rappresentino i due valori della tangente trigonometrica della curva al punto multiplice: questi valori dovranno soddisfare all'equazione

$$P+\frac{Qdy}{dx}=0,$$

e daranno

$$P+Q\alpha=0 \quad PQ+\alpha'=0.$$

Queste due equazioni, tolta l'una dall'altra, danno

$$Q(\alpha-\alpha')=0:$$

Or il fattore $\alpha-\alpha'$, essendo composto di due quantità ineguali, non può esser nullo; d'onde segue che si ha $Q=0$; ciocchè riduce l'equazione $P+Q\alpha=0$ a $P=0$. Per mezzo di questi valori di P, e Q, l'equazione $P+Q\frac{dy}{dx}=0$, o piuttosto $\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{Q}$ diviene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

** 138. Se in luogo di due rami riuniti in un punto, ne abbiamo un più gran numero, basta di considerarne due solamente, per pruovare che al punto d'incontro di tutti questi rami, $\frac{dy}{dx} = 0$: non si può giungere così facilmente alla stessa conseguenza allorchè molti rami di curva hanno una sola tangente comune: nondimeno in questo stesso caso, si può ancora dimostrare che $\frac{dy}{dx}$ debba presentarsi sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma come la dimostrazione di questo teorema è fondata sulla considerazione de' contatti delle curve, noi ci riserbiamo di darla nell' art. (170), allorchè avremo parlato delle curve osculatrici **.

139. Si può osservare che la dimostrazione dell' art. 137 era fondata sulla condizione che l' equazione primitiva era sgombra de' radicali; se essa si differenziasse, senza di averli fatti prima scomparire, potrebbe avvenire che un' equazione la quale ammette de' punti multiplici non desse $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Per esempio l' equazione dell' art. 131 è in questo caso: essa ha un punto doppio all' origine; ed intanto se in essa si fa $x=0$, l' equazione (62) riducesi a $\frac{dy}{dx} = 1$.

140. Infine aggiungeremo, che, benchè per un punto multiplice abbia luogo l' equazione $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$,

non ne segue però che questa equazione debba unicamente sussistere per un punto di questo genere, poicchè la dimostrazione precedente non ci dice affatto che questa proprietà sia loro esclusiva. Perciò quello che, dee conchiudersene, è che la riduzione di

$\frac{dy}{dx}$ a $\frac{o}{o}$ indica solamente che può esservi luogo ad un punto multiplice.

141. Ciocchè precede basta per indicare il mezzo di conoscere se possono esservi de' punti multiplici in una curva determinata da una equazione. A tal oggetto sia V questa equazione; se ne dedurrà per mezzo della differenziazione, $Pdx+Qdy=o$, e si vedrà se gli stessi valori di x e di y soddisfacciano nel tempo stesso alla proposta, ed all' equazioni $P=o$, $Q=o$; se questo è, ciò sarà un indizio che questi valori di x e di y possono appartenere ad un punto multiplice, ed allora, esaminando la curva presso di questo punto, si conoscerà s'esso è multiplice.

De' punti conjugati.

142. Esaminiamo una curva tale, che nella parte, in cui le sue coordinate sono imaginarie, vi siano solamente due coordinate reali; queste coordinate costruiranno un punto, che sarà interamente distaccato dalla curva, ed a cui si è dato il nome di punto isolato, o di *punto conjugato*.

Rappresentiamo ora per mezzo di $y=fx$ l' equazione di una curva, che ha un punto conjugato. Se a, e b sono le coordinate di questo punto, bisognerà che almeno presso di esso, le coordinate siano imaginarie, altrimenti esso non sarà isolato: per conseguenza se supponiamo che l' ascissa a cresca di una piccola quantità h, l' ordinata corrispondente rappresentata da $(a+h)$, dovrà essere imaginaria; ora la serie di Taylor ci dà, in generale

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{ecc.}$$

Facendo $x=a$, bisognerà che l' ordinata corrispondente sia b; per conseguenza cambieremo y in b, e chiamando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ecc. ciocchè in questa ipotesi divengono i coefficienti differenziali, avremo

$$f(a+h)=b+\left(\frac{dy}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3}+\text{ecc.}$$

Or affinchè $f(a+h)$ sia una quantità imaginaria, bisogna almeno che una dell' espressioni

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ecc. sia imaginaria;

cioè che l' ipotesi di $x=a+h$ renda imaginario uno de' coefficienti differenziali: se questa condizione ha luogo, la curva potrà avere un punto conjugato.

Per esempio, se si ha l' equazione

$$y=\pm(x+b)\sqrt{x};$$

differenziandola si troverà

$$\frac{dy}{dx}=\pm\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{x}}\right).$$

Questo valore divenendo imaginario, allorchè si fa $x=-b$, e per conseguenza $y=0$, dee presumersi che il punto A, (Fig. 37), le cui coordinate sono $x=-b$, e $y=0$, è un punto conjugato; riconosceremo in seguito se questo punto è realmente conjugato, aumentando, e diminuendo successivamente l' ascissa $-b$ di una quantità più piccola di b, o

Fig. 37

troveremo che ne' due casi, y diviene imaginario, il che annunzia che il punto in quistione è un punto conjugato.

143. I punti conjugati, come i punti multiplici, manifestano la loro esistenza, con ridurre il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{0}{0}$. Infatti l'equazione

$$Q\frac{dy}{dx}+P=0$$

differenziata e divisa per dx, ci dà

$$Q\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{dQ}{dx}+\frac{dP}{dx};$$

e si vede che il termine affetto da $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha Q per coefficiente; differenziando di nuovo, si troverà che Q è ancora il coefficiente di $\frac{d^3y}{dx^3}$, e così in seguito; in guisachè allorchè si sarà giunto al coefficiente dell'ordine n, si avrà un risultamento della forma

$$Q\frac{d^ny}{dx^n}+K=0\ldots(65),$$

Ciò posto, vi è almeno uno de' coefficienti differenziali, che diviene imaginario per un dato valore di x, e che per conseguenza contiene un radicale; rappresentando questo coefficiente con $\frac{d^ny}{dx^n}$, bisognerà che la funzione di x che rappresenta questa

espressione, abbia più di un valore. Ciò basta per poter conchiudere, come nell' art. 137, che $Q=0$,

ciocchè ridurrà l'equazione $P+Q\frac{dy}{dx}=0$, a $P=0$: segue da ciò che si dee avere $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$.

Delle curve osculatrici.

144. Siano $y=\varphi x$, $y=Fx$ l'equazioni di due curve, che s'incontrano al punto M (Fig. 11) le cui coordinate siano $AP=x'$, $PM=y'$; per questo punto avrà luogo l'equazione

Fig. 11

$$\varphi x'=Fx';$$

Supponiamo che x' divenga in seguito $x'+h$, l'equazioni precedenti daranno

$$MP'=\varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{d\varphi x'}{dx'}h+\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc. (66).}$$

$$M''P'=F(x'+h)=Fx'+\frac{dFx'}{dx'}h+\frac{d^2Fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc. (67).}$$

Se tutt' i termini corrispondenti di questi sviluppi sono identici, le curve si confonderanno; se si ha solamente $Fx'=\varphi x'$, le curve non avranno che il solo punto M di comune, come abbiamo veduto; se di

più si ha $\frac{dFx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'}$, queste curve si ravvicineranno di vantaggio; ed anche di più, se, oltre

queste equazioni, si ha benanche $\frac{d^2Fx'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}$, e

così in seguito: poicchè egli è evidente che la differenza di $M''P''$ da $M'P'$, sarà tanto minore, quanto più grande sarà il numero de' termini eguali ne' di loro sviluppi.

Ciò posto, siano a, b, c, ecc. le costanti dell' equazione $y=Fx$; senza cambiare la natura della curva si possono dare de' valori arbitrarii a queste costanti: per esempio, se si ha l'equazione $y^2=mx+nx^2$, ch'è quella di un' ellisse, qualunque valore che si dia alle costanti m, n, questa equazione non cesserà di appartenere all'ellisse, poichè l'equazione conserva sempre la stessa forma; ben inteso però che le costanti si facciano variare di valore, e non di segno, e che non si suppongano eguali a zero. Segue da questa osservazione, che possono riguardarsi come arbitrarie le costanti a, b, c, ec., le quali entrano nell'equazioni

$$\varphi x'=Fx',\ \frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{dFx'}{dx'};\ \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2Fx'}{dx'^2};\ \text{ecc.};$$

e prendendo tante equazioni, quante sono le costanti, queste si potranno determinare, dietro la condizione che soddisfacciano all'equazioni.

Per esempio, se l'equazione $y=Fx'$ non contiene che tre costanti a, b, c, si farà

$$\varphi x'=Fx',\ \frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{dFx'}{dx'},\ \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2Fx'}{dx'^2}:$$

Si ricaveranno da quest' equazioni i valori di a,b,c in funzione di x', di y', di $\frac{dy'}{dx'}$ ecc., e si sostituiranno all'equazione $y=Fx$. Questa allora avrà tale proprietà, che sostituendo in essa $x+h$ in luogo di x, l'equazione (67) avrà i tre primi termini del suo secondo membro rispettivamente eguali a' tre primi

del secondo membro dell' equazione (66).

Ciocchè si è detto di un' equazione che racchiude tre sole costanti, può applicarsi ad una che ne conterrebbe un più gran numero.

145. Sopponiamo, per esempio, che l' equazione $y=Fx$ rappresenti quella di una retta; essa sarà rimpiazzata dall' altra

$$y=ax+b\ldots(68).$$

L' equazioni di condizione necessarie per l' eliminazione delle costanti a, b, saranno

$$\varphi x'=ax'+b, \text{ o } y'=ax'+b\ldots(69),$$

$$\frac{d\varphi x'}{dx'}=a, \text{ o } \frac{dy'}{dx'}=a;$$

eliminando a, si otterrà

$$y'=\frac{dy'}{dx'}x'+b:$$

Da questa equazione se ne tira il valore di b, e sostituendo nell' equazione (68) questi valori di a, e di b, questa diverrà

$$y=\frac{dy'}{dx'}x+y'-\frac{dy'}{dx'}x',$$

la quale può mettersi sotto la seguente forma

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')\ldots(70).$$

Si riconosce in questa equazione quella di una tangente MT (Fig. 3) menata dal punto M, in cui le coordinate sono x, y. Tosto vedremo, perchè questa retta MT è tangente in M.

Fig. 3

146. Per evitare le perifrasi, conveniamo di denominare le curve per mezzo delle loro equazioni.

Abbiamo veduto, art. 144, che se le curve $y=\varphi x$, $y=Fx$ hanno solamente un punto comune, chiamando x' ed y' le coordinate a questo punto, si avrebbe l' equazione di condizione $\varphi x=Fx'$; ma che determinando due costanti dell' equazione $y=Fx$, per

mezzo delle condizioni $\varphi x'=Fx'$, $\frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{dFx'}{dx'}$, le

le curve comincierebbero a ravvicinarsi.

Rappresentisi con fx ciocchè diviene $y=Fx$, dopo avervi sostituito il valore di queste due costanti; la curva $y=fx$ sarà un' osculatrice di prim' ordine all' altra $y=\varphi x$, e se in virtù de' valori arbitrarii, che possono darsi alle costanti, se ne eliminino tre dall' equazione $y=Fx$, per mezzo delle condizioni seguenti

$$Fx=\varphi x', \frac{dFx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'}, \frac{d^2Fx'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\ldots(71);$$

e che rappresentisi con ψx ciocchè diviene Fx, dopo tale sostituzione, la curva $y=\psi x$ sarà un' osculatrice del second' ordine alla curva $y=\varphi x$, a cui si avvicinerà anche di più; e così in seguito, in guisa che per un' osculatrice dell' ordine *n*esimo si avranno l' equazioni

$$Fx'=\varphi x', \frac{dFx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'}, \frac{d^2Fx'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\ldots$$

$$\frac{d^nFx'}{dx'^n}=\frac{d^n\varphi x'}{dx'^n} (72).$$

147. Dimostriamo ora, che di due osculatrici ad una curva, facendo variare le costanti di una stessa equazione, quella ch' è di un ordine inferiore, non può passare tra l' altra e la curva medesima.

Per esempio, sia MB (Fig. 11) la curva $y=\varphi x$, Fig. 11

ed MC la sua osculatrice $y=\psi x$ di second' ordine; si dee dimostrare, che l'osculatrice $y=fx$ di prim' ordine non può passare trà le curve MB, MC.

A tal oggetto, sostituendo ad x, $x'+h$ in quest' equazione, si avrà

$$P'M'=\varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{d\varphi x'}{dx'}h+\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ ec.}$$

$$P'M''=\psi(x'+h)=\psi x'+\frac{d\psi x'}{dx'}h+\frac{d^2\psi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^3\psi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ ecc.}$$

$$f(x'+h)=fx'+\frac{dfx'}{dx'}h+\frac{d^2fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^3fx'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ ec.}$$

La curva $y=\psi x$, essendo un' osculatrice di second ordine all' altra $y=\varphi x$, bisogna che sia

$$\psi x'=\varphi x',\ \frac{d\psi x'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'},\ \frac{d^2\psi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}.$$

Da un' altra parte essendo la curva $y=fx$ un' osculatrice di prim' ordine all' altra $y=\varphi x$, si ha ancora

$$fx'=\varphi x',\ \frac{dfx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'}:$$

Perciò si avrà

$$\varphi x'=\psi x'=fx'$$

$$\frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{dfx'}{dx'}$$

e solamente

$$\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2\psi x'}{dx'^2};$$

facciasi, per render più semplici quell' espressioni

$$\varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h = K$$

$$\frac{d^2\varphi x'}{2dx'^2} = V;$$

i tre sviluppi precedenti potranno scriversi così Fig. 11

$$PM' = \varphi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\,\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

$$PM'' = \psi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3}\,\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

$$f(x'+h) = K + \frac{d^2fx'}{dx'}\,\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3fx'}{dx'^3}\,\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

e queste potranno mettersi sotto la seguente forma

$$\varphi(x'+h) = K + Vh^2 + Mh^3$$

$$\psi(x'+h) = K + Vh^2 + Nh^3$$

$$f(x'+h) = K + \frac{d^2fx'}{d'x^2}\,\frac{h^2}{2} + Ph^3.$$

Le curve $y=fx$, ed $y=\psi x$ essendo osculatrici, una di prim' ordine, e l' altra di secondo, V differisce necessariamente da $\frac{d^2fx'}{2dx'^2}$. Dunque due ipo-

tesi solamente si possano fare sopra V, cioè

$$V < \frac{d^2 fx'}{2dx'^2}, \text{ o } V > \frac{d^2 fx'}{2dx'^2}$$

Indichi Z la differenza di $\frac{d^2 fx'}{dx'^2}$ e di V; si avrà nel primo caso

$$V+Z=\frac{d^2 fx'}{2dx'^2};$$

e nel secondo

$$V-Z=\frac{d^2 fx'}{2dx'^2};$$

sostituendo questo valore di $\frac{d^2 fx'}{2dx'^2}$ in quella di $f(x'+h)$, ed osservando che h^2 è fattore comune ne' tre sviluppi qui sopra recati, essi diverranno

$$\varphi(x'+h)=K+(V+Mh)h^2$$

$$\psi(x'+h)=K+(V+Nh)h^2$$

$$f(x'+h)=K+(V+Z+Ph)h^2.$$

Or facendo h piccolissimo, egli è possibile che la quantità Z independente da h sia più grande dell' espressioni Mh, Nh, le quali tendono verso zero: In tal caso, se Z è positivo, $f(x'+h)$ sorpasserà $\varphi(x'+h)$ e $\psi(x'+h)$: allora si ha $f(x'+h)$, o P'M''' maggiore di P'M', e di P'M'', il che dimostra che la curva $y=fx$ rappresentata da MM''' non può passare tra le due altre. Fig. 11

Se al contrario Z è negativa, si ha $f(x'+h)$ o P'M''' minore di P'M', e di P'M''. Allora essendo la curva MM''' quella che più si avvicina all' asse della x, non può essere compresa tra le due altre.

148. Ora si può render ragione del perchè la retta MT (Fig. 3) che abbiamo veduto nell' art. 117 essere un' osculatrice del primo ordine, è tangente alla curva; poichè risulta da questa teorica, che tra la retta e la curva non può passarvi altra retta, ciocchè costituisce la proprietà della tangente.

Si dice che la tangente ha un contatto di prim'ordine colla curva. In generale, una osculatrice di un ordine n ha un contatto dallo stesso ordine colla curva, alla quale è osculatrice: perciò, allorchè tra due curve si hanno l' equazioni

$$\varphi x'=\mathrm{F}x',\ \frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\mathrm{F}x'}{dx'},\ \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\mathrm{F}x'}{dx'^2},$$

queste curve hanno tra loro un contatto di second' ordine; e questo sarà di terzo ordine, se, oltre dell' equazioni precedenti si ha ancora $\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}=\frac{d^3\mathrm{F}x'}{dx'^3}$, e così in seguito.

149. L' equazione del cerchio

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2$$

comprendendo tre costanti, possiamo determinare il cerchio, che ha un contatto di second' ordine con una curva MB (Fig. 14), di cui si ha l' equazione. A tal oggetto siano x', y', le coordinate del cerchio al punto M; si avrà

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=\gamma^2 \ldots (73),$$

ed y' dovrà rimpiazzare $\mathrm{F}x'$ nell' equazioni del contatto che sono

$$\varphi x'=\mathrm{F}x',\ \frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\mathrm{F}x'}{dx'},\ \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\mathrm{F}x'}{dx'^2};$$

se nello stesso tempo adottiamo x, ed y per le coor-

dinate della curva $y=\phi x$ al punto di contatto, l'equazioni precedenti diverranno

$$y=y',\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}\ldots(74);$$

bisognerà dunque sostituire alle quantità y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{d^2x'}$ i di loro rispettivi valori tirati dall'equazione (73), e da' suoi differenziali successivi, i quali sono

$$(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}+(x'-\alpha)=0\ldots(75)$$

$$(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{dy'^2}{dx'^2}+1=0\ldots(76)$$

Or sostituire nell'equazioni (74) i valori di y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ che si ottengono dall'equazioni (73), (75), (76), non è altro ch'eliminare queste stesse quantità tra l'equazioni (73), (75), (76); togliendo dunque gli accenti, si avrà

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2\ldots(77)$$

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)=0\ldots(78)$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}+1=0\ldots(79)$$

Da questa ultima equazione si ottiene

$$y-\beta=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ldots(80);$$

Mettendo questo valore nell' equazione (78), si ottiene,

$$x-\alpha=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}\ \dots\ (81):$$

Sostituendo questi valori di $y-\beta$, di $x-\alpha$ nell' equazione (77), si avrà

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}=\gamma^2\ ;$$

questa equazione riducesi a

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=\gamma^2\ ;$$

ed estraendone la radice quadrata; si avrà

$$\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\gamma.$$

150. Il doppio segno è relativo alla posizione di γ: se la curva volge la sua concavità all' asse delle x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà negativo; e sostituito nel valore

$$\gamma=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ \dots\ (82).$$

lo renderà positivo,

151. Si è dato il nome di cerchio osculatore a quello che qui sopra abbiamo esaminato, ed al suo raggio quello di raggio di curvatura, o di raggio d' *osculo*: duque per ottenere il raggio di curvatura, bisognava dedurre dall' equazione della curva i coefficienti differenziali necessarii all' uopo, e sostituirli nella formola (82).

Se la curva dovesse volgere la sua convessità all' asse delle x, metteremo il segno positivo innanzi al valore di γ.

152. ** Il valore di γ qualche volta si scrive così

$$\gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}.$$

Questa formola si deduce facilmente dall' equazione (82); poichè riducendo allo stesso denominatore i due termini, che sono sotto la parentesi, ed osservando che la potenza $\frac{3}{2}$ di dx^2 è dx^3, si otterrà

$$\gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3\frac{d^2y}{dx^2}}=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}.\ **$$

153. Per dare un' applicazione della formola (82), cerchiamo il raggio di curvatura della parabola MDN (Fig. 6), la cui equazione è $x^2=my$; si troverà

Fig. 6

$$2xdx=mdy,\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{m};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{m};$$

dunque si avrà

$$\gamma=\frac{(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{(1+\frac{4x^2}{m^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}}$$

$$=\frac{[\frac{4}{m^2}(\frac{m^2}{4}+x^2)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}}$$

$$=\frac{\frac{8}{m^3}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}}=\frac{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{m^2}{4}} \quad \ldots (83):$$

Or la normale della parabola avendo per espressione $\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, si vede che il raggio di curvatura della parabola è eguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro.

154. Il cerchio osculatore può servire a misurare la curvatura della curva in un punto M (Fig. 11): poicchè se in questo punto M si descriva col raggio di curvatura un arco piccolissimo MC, questo potrà esser considerato come lo stesso arco della curva, da cui si allontana pochissimo: or quanto più curvo è l'arco MC, tanto più piccolo sarà il suo raggio; d'onde segue *che il raggio di curvatura è in ragione inversa della curvatura della curva.*

Per esempio, considerando l'equazione (83), che da il raggio di curvatura della parabola, si vede che al vertice della curva, in cui si ha $x=0$, è $\gamma=\frac{m}{2}$; ma che γ aumenta, allorchè x cresce successivamente; il che annunzia che la curvatura della parabola va diminuendo coll'allontanarsi dal vertice.

155. La quantità $\frac{dy}{dx}$ esprimendo la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente fa in M' coll'asse delle ascisse, (Fig. 4), l'equazione della normale, che si tira da un punto, in cui le coordinate sono α, β, sarà

$$y-\beta=-\frac{dx}{dy}(x-\alpha):$$

Questa essendo la stessa dell' equazione (78), nella quale α, β sono le coordinate del centro del cerchio osculatore, si vede che il raggio di questo cerchio è una normale alla curva.

156. Se ora per tutt' i punti della curva MM'M''M''' (Fig. 12), si menino de' raggi di curvatura MO, M'O', M''O'' ec. si costruirà una serie di punti O, O', O'' ec.; facendo dipendere questi punti da una certa legge *, ciò basta a poter dare il nome di curva al nostro sistema: ma non pronunzieremo ancora cosa alcuna sulla natura di questa nuova curva, che chiamasi l' evoluta della curva MM'M'': questa relativamente all' evoluta vien chiamata *evolvente*.

Fig. 12

157. Se si passa da un punto all' altro dell' evoluta, non solamente x ed y variano, ma ancora α, β e γ variano nello stesso tempo, poichè α, β essendo in generale le coordinate al centro del cerchio osculatore, come l' evoluta è formata dal sistema di questi centri, ne risulta che α, β sono le coordinate dell' evoluta, coordinate, che debbono variare da un punto della curva all' altro. Lo stesso è di γ, ch' è il raggio del cerchio osculatore, e che allora rappresenta la distanza di un punto qualunque dell' evoluta, da un punto dell' evolvente, d' onde parte γ. Per conseguenza differenziando l' equazione (78), per rispetto a tutte le lettere **, e dividendo per dx, si avrà

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}+1-\frac{d\alpha}{dx}=0;$$

* Questa è implicitamente contenuta nell' equazione della curva MM'M'', poichè data questa curva, ne risulta la posizione de' suoi punti.

** L' equazione $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2$, e le sue derivate non possono essere differenziate diversamente; in-

Togliendo da questa l'equazione (79), rimane

$$-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}=0,$$

da cui si ottiene

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}}=-\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}};$$

ora abbiamo art. 67.

$$\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}}=\frac{dx}{d\beta};$$

dunque sarà

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{d\beta};$$

e per conseguenza, art. 24.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\alpha}{d\beta};$$

Se questo valore di $\frac{dy}{dx}$ si sostituisca nell'equazione (78), si otterrà

$$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\ldots(84).$$

---

tanto sembra che tutt' altro si è fatto, allorchè abbiamo dedotte l' equazioni (75) e (76) dall' equazione (73). Potrà rispondersi, che come nell' equazione (73) vi erano due costanti arbitrarie, esse sono state determinate dietro la condizione, che fossero nulle le funzioni rappresentate da' primi membri dell' equazioni (75) e (76); ma senza ciò, da che l' equazione (73) ha luogo, non si sarebbe potuto conchiudere che dovessero ben anche aver luogo l' equazioni (75), e (76).

158. Abbiamo veduto, art. 155, che l'equazione

$$y-\beta=-\frac{dx}{dy}(x-\alpha),$$ era quella del raggio osculatore, che passava pel punto segnato per mezzo delle coordinate x, y: mettendo $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in luogo di $-\frac{dx}{dy}$, essa sarà sempre l'equazione dello stesso raggio: ma l'equazione (84) è quella benanche di una tangente menata dal punto dell'evoluta, in cui le coordinate sono α, β *; dunque il raggio di curvatura è tangente all'evoluta.

159. Come nella dimostrazione seguente noi impiegheremo il differenziale di un arco di curva, perciò anderemo a determinare questo differenziale.

Supponiamo che un'ascissa $AP=x$, (Fig. 3) cresca di $PP'=h$, se meniamo la parallela MQ all'asse delle x, avremo evidentemente

$$\text{corda } MM'=\sqrt{(MQ^2+QM'^2)}=\sqrt{(h^2+QM'^2)};$$

$$\text{ora } M'Q=f(x+h)-fx=\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{ec.};$$

Sicchè sostituendo questo valore nell'espressione di MM', e rapprerentando con A e B i rispettivi coefficienti di h^3, di h^4; si avrà

---

* Osservisi ch'essendo in generale α, e β le coordinate di un punto qualunque dell'evoluta, l'equazione di questa sarà $\beta=f\alpha$; dunque $\frac{d\beta}{d\alpha}$ rappresenta, art. 71, l'angolo che fa la tangente coll'asse delle ascisse al punto α, β.

$$MM'=\sqrt{(h^2+\frac{dy^2}{dx^2}h^2+Ah^3+Bh^4+)}\text{ ecc.},\ \text{o}$$

$$MM'=\sqrt{[h^2(1+\frac{dy^2}{dx^2})+Ah^3+Bh^4+]}\text{ ecc.};$$

dunque sarà

$$\frac{MM'}{h}=\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2}+Ah+Bh^2+\text{ecc.})}$$

Nel caso del limite, la corda si confonde coll' arco, che rappresenterò con s, in guisa che avremo

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})};$$

d' onde si otterrà, moltiplicando per dx

$$ds=(\sqrt{dx^2+dy^2}).$$

160. Per l' evoluta, le cui coordinate sono α e β, si avrà egualmente

$$ds=\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)}.$$

161. Differenziamo ora l' equazione (77) per rispetto a tutte le lettere; si avrà

$$(y-\beta)(dy-d\beta)+(x-\alpha)(dx-d\alpha)=\gamma d\gamma;$$

l' equazione (78) ci da

$$(y-\beta)dy+(x-\alpha)dx=0;$$

togliendola dall' equazione precedente, si avrà

$$-(y-\beta)\,d\beta-(x-\alpha)d\alpha=\gamma d\gamma...(85):$$

Se in questa equazione, e nell' altra (77) sostituiscasi il valore di $y-\beta$ dato dall' equazione (84), troveremo queste due equazioni

$$-\frac{d\beta^2}{d\alpha}(x-\alpha)-(x-\alpha)d\alpha=\gamma d\gamma$$

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2;$$

ossia

$$-(x-\alpha)\left(\frac{d\beta^2+d\alpha^2}{d\alpha}\right)=\gamma d\gamma$$

$$(x-\alpha)\frac{\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)}}{d\alpha}=\gamma;$$

dividendo la prima di queste due equazioni per la seconda, si avrà

$$d\gamma=-\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)}:$$

Or si è veduto, (art. 160), che, chiamando s un arco dell' evoluta, si avea

$$ds=\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)};$$

sicchè sarà

$$d\gamma=-ds, \text{ o } d(\gamma+s)=0:$$

e come ogni funzione, il cui differenziale è nullo, è costante, sarà perciò $\gamma+s=costante$; dunque se il raggio di curvatura cresce, bisogna che s diminuisca di altrettanto, ciocchè si accorda con ciocchè abbiamo veduto.

Questa proposizione si annuncia così; *il raggio di curvatura varia per le stesse differenze dell' evoluta*.

162. Siano (Fig. 12) $MO=\gamma$, $OB=s$; $M'O'=\gamma'$, $O'B=s'$; pel raggio osculatore MO si avrà

$$\gamma+s=costante, \text{ o } MO+\text{ arco } OB=costante \ldots (86);$$

e per l' altro M'O'

$$\gamma'+s'=costante, \text{ o } M'O'+O'B=costante \ldots (87):$$

i secondi membri dell' equazioni (86) e (87) rappresentando una stessa costante; ne dedurremo

$$MO+\text{arc}OB=M'O'+\text{arc}O'B;$$

e perciò

$$M'O'-MO=\text{arc}OB-\text{arc}O'B=\text{arc}OO';$$

cioè *la differenza di due raggi osculatori è eguale all' arco ch' è tra essi*;

163. Segue da ciò che se sull' evoluta OB si applica un filo, che essendo tangente in O, sia fissato al punto M della evolvente MC; allorchè questo filo si svilupperà, tenendolo costantemente teso, la sua estremità M descriverà in questo movimento l' evoluta MC; poicchè supponendo che in questo movimento sia giunto in una posizione O'M', si sarà accresciuto di OO', e perciò eguaglierà in lunghezza il raggio di curvatura, che passa pel punto O': dunque l' estremità M' di questo filo sarà sull' evolvente.

164. Ecco in qual modo può trovarsi l' equazione dell' evoluta: 1.° dall' equazione della curva si prenderanno i valori di y, e de' coefficienti differenziali

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ecc, secondo l'ordine del contatto; 2.° si

sostituiranno questi valori nell' equazioni (78) e (79), il che darà due nuove equazioni, che saranno funzioni di x; 3.° eliminando x fra queste equazioni, si arriverà ad una equazione tra α e β. Questa sarà quella dell' evoluta.

165. Determiniamo con questo metodo l' evoluta della parabola, che ha per equazione $x^2=my$; differenziando si trova

$$2xdx=mdy,$$

e perciò

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{m},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{m};$$

sostituendo nell' equazioni (78), e (79) questi valori

di y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. queste diverranno

$$\left(\frac{x^2}{m}-\beta\right)\frac{2x}{m}+x-\alpha=0 \ldots (88)$$

$$\left(\frac{x^2}{m}-\beta\right)\frac{2}{m}+\frac{4x^2}{m^2}+1=0 \ldots (89)$$

togliendo l' equazione (88) dall' altra (89) moltiplicata per x, si avrà

$$\alpha+\frac{4x^3}{m^2}=0 \ldots (90):$$

Da un' altra parte l' equazione (89) moltiplicata per m^2, e ridotta, ci da

$$6x^2-2m\beta+m^2=0,$$

da cui si ha

$$\beta=\frac{6x^2+m^2}{2m}=\frac{3x^2}{m}+\frac{m}{2} \ldots (91);$$

eliminando x tra l'equazione (90), e (91), si avrà l'equazione dell' evoluta. Ma prima di ciò fare, osservisi che per l' origine, ov' è $x=0$, l' equazioni (90) e (91) riduconsi ad $\alpha=0$, $\beta=\frac{m}{2}$; prendendo dunque $DB=\frac{m}{2}$, (Fig. 6), si ha il punto B dell' evoluta; dippiù l' equazione (91) ci fa comprendere, che dando ad x de' valori positivi o negativi, β aumenta a misura che questi valori crescono, d' onde segue che l' evoluta si compone di due rami BC, BC'.

Fig. 6

166. Per eliminare x tra l' equazioni (90), e (91), la prima elevata a quadrato, da

$$x^6=\frac{\alpha^2 m^4}{16};$$

da un'altra parte dall' equazione (91) si ottiene

$$x^2=\left(\beta-\frac{m}{2}\right)\frac{m}{3};$$

elevando a cubo i due membri di questa equazione, si ha

$$x^6=\left(\beta-\frac{m}{2}\right)^3\frac{m^3}{27};$$

eguagliando questi due valori di x^6, e dividendo per m^3 si avrà

$$\frac{\alpha^2 m}{16}=\left(\beta-\frac{m}{2}\right)^3\frac{1}{27}:$$

chiamisi β' la quantità $\beta-\frac{m}{2}$ e moltiplicando per 27, si avrà

$$\beta'^3=\frac{27}{16}m\alpha^2=n\alpha^2 \; *$$

facendo $\frac{27}{16}m=n$: l' origine si trasporta allora in B, poichè $\beta'=\beta-\frac{m}{2}$.

167. Una osculatrice (Fig. 13) può essere situata in due Fig. 13

---

* È facile il dimostrare che i rami BC, BC' si voltino le loro convessità; poichè differenziando l' equazione $\beta'^3=n\alpha^2$, si trova

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}=-\frac{2}{9}n^{\frac{1}{3}}\alpha^{-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{n}{\alpha^4}},$$ valore negativo tanto per α positivo, che per α negativo; ciocchè pruova che ogni ramo della curva rivolga la sua concavità all' asse delle x.

maniere differenti rispetto alla curva , colla quale è in contatto; 1.° essa può avere i suoi due rami tutti due al di sopra della curva, come nella (Fig. 15), o tutti due al di sotto, come nella (Fig. 14); allora l'osculatrice non farà che toccare la curva; 2.° l'osculatrice può avere un ramo al di sopra della curva, e l'altro al di sotto, come nella (Fig. 11): in tal caso l'osculatrice taglierà la curva in M.

Fig. 15
Fig. 14
Fig. 11

Fig. 16 168. Andiamo a dimostrare (Fig. 16), che il cerchio osculatore tagli la curva.

Siano per una stess' ascissa $x+h$

Y l'ordinata della curva

Y' l'ordinata dell'osculatrice.

Si ha dunque

$$\left.\begin{array}{l} Y=\varphi(x'+h)=\varphi x'+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{ec.} \\ Y'=F(x'+h)=Fx'+A'h+B'h^2+C'h^3+\text{ec.} \end{array}\right\}\ldots(92)$$

Or poichè il cerchio è un' osculatrice di second' ordine, i tre primi termini di questi sviluppi saranno gli stessi; dunque la differenza delle ordinate, che corrisponde ad $x+h$ sarà

$$(C-C')h^3+\text{ecc}\ldots\ldots(93).$$

Supponiamo ora che l'ascissa divenga $x-h$, bisognerà cambiare h in $-h$ nella differenza delle ordinate il che darà

$$-(C-C')h^3+\text{ecc}\ldots(94).$$

Or come il primo termine delle serie (93) e (94) può sorpassare la somma di tutti gli altri, prendendo h assai piccolo, ne risulta che la differenza delle ordinate cambierà di segno, allorchè l'ascissa sarà $x-h$ invece di $x+h$: perciò prendendo (Fig. 16) $PP''=PP'=h$, se la differenza delle ordinate corrispon-

denti ad $x+h$ è una quantità positiva; cioè se l' ordinata P'M' della curva sorpassa P'N', l' ordinata P"N" dell' osculatrice sorpasserà l' altra P"M" della curva; d' onde si conchiuderà, che l' osculatrice da una parte è al di sopra della curva, e dall' altra al di sotto, e che perciò la taglia.

Ciocchè dicesi del cerchio, ch' è un' osculatrice di second' ordine, può applicarsi ad ogni osculatrice d' ordine pari.

169. Se l' osculatrice fosse di un ordine impari, toccherebbe solamente la curva in vece di tagliarla; il che è evidente dietro la precedente dimostrazione.

** 170. Ecco il teorema che abbiamo promesso di dimostrare nell' art. (138) sopra i punti moltiplici. Se le curve, che si riuniscono in uno di questi punti, hanno una tangente commune, la cui equazione sia rappresentata da $ax+b$, cambieremo Fx in $ax+b$, nella seconda dell' equazione (92), ciocchè darà $\frac{dFx}{dx}$, o $A'=a$, e tutti gli altri coefficienti di questa equazione saranno nulli. La tangente, essendo una osculatrice del primo ordine, $\phi x+Ah$ eguaglierà $Fx+A'h$, ciocchè ridurrà la differenza dell' equazioni (92) al $Y-Y'=Bh^2+Ch^3+$ ec. (Fig. 13)

Questa differenza delle ordinate, dovendo avere un valore doppio QM, QM' (Fig. 13), bisogna che uno de' coefficienti differenziali rappresentati da B, C ecc., abbia due valori.

Sia $\frac{d^n\phi x}{dx^n}$ questo coefficiente; se si prendano i differenziali successivi dell' equazione $Pdx+Qdy=o$, abbiamo veduto, art. 143, che in ogni differenziazione, il termine Q resta sempre fattore del differenziale dell' ordine più elevato di y; di sorta che il differenziale dell' ordine n della funzione proposta potrà essere rappresentato da $Q\frac{d^ny}{dx^n}+K=o$ dovendo

$\frac{d^n y}{dx^n}$ avere due valori, si dimostrerà, come nell' (art. 137), che Q è nullo. Questo valore di Q ridurrà quello di P a zero; d'onde segue che l'equazione

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{Q}, \text{ darà } \frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}.$$

SVILUPPO DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Applicazione del Teorema di Taylor allo sviluppo delle funzioni di due variabili, che ricevono degli accrescimenti.

171. Allorchè in una funzione u di due variabili indipendenti x, y, si cambia x in $x+h$, ed y in $y+h$, il teorema di Taylor può darci lo sviluppo di questa funzione. Infatti se si metta primieramente $x+h$ in luogo di x, si avrà

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\ldots(95);$$

in questo sviluppo essendovi h, y non può essere contenuto che nelle funzioni u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ ec.

Cambiando dunque y in $y+k$ in queste funzioni, la u sarà rimpiazzata nell'equazione (95) da

$$u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}+\text{ec.};$$

la $\frac{du}{dx}$ da $\frac{du}{dx}+\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}k+\frac{d^2\frac{du}{dx}}{dy^2}\frac{k^2}{2}$

$$+\frac{d^3\frac{du}{dx}}{d^3y}\frac{k^3}{2.3}+\text{ cc.}$$

$$\text{la } \frac{d^2u}{dx^2} \text{ da } \frac{d^2u}{dx^2}\ \frac{d\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}k+\frac{d^2\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^2}\frac{k^2}{2}$$

$$+\frac{d^3\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}+\text{ ecc.}$$

ecc. ec.

E formando tante linee, quanti termini vi sono nell' equazione (95), otterremo

$$f(x+h+y+k)=u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\text{cc.}$$
$$+\frac{du}{dx}h+\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}hk+\text{ ecc.}$$
$$+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{ecc.}$$
$$+\text{ecc.} \quad \ldots (96)$$

172. Se si fossero fatte le sostituzioni in un ordine inverso, si sarebbe in primo luogo trovato, cambiando y in $y+k$

$$f(x,y+k)=u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}+\text{ ecc.};$$

e mettendo in seguito in ogni termine $x+h$ in luogo di x, si sarebbe giunto a questo sviluppo

$$f(y+k\,,\,x+h)=u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{ecc.}$$
$$+\frac{du}{dy}k+\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}hk+\text{ecc.}\quad\ldots(97)$$
$$+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\text{ecc.}$$
$$+\text{ecc.}$$

Essendo arbitrario l' ordine, col quale abbiamo fatto queste sostituzioni, poichè dovendo mettere $x+h$ ovunque entra x, ed $y+h$ ovunque entra y, queste operazioni non possono influire l' una sull' altra; ne segue che i due sviluppi (96, e 97) debbano essere identici, e che perciò i termini affetti dagli stessi prodotti di h e di k hanno gli stessi valori: dunque se noi eguagliamo i termini moltiplicati per hk, otterremo

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}\text{, o piuttosto }\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}.$$

Questa equazione c' insegna che per prendere il secondo differenziale del prodotto di due variabili, è arbitrario l' ordine delle differenziazioni. La stessa cosa si dimostrerebbe pe' coefficienti differenziali degli ordini superiori, eguagliando tra loro i coefficienti differenziali degli altri termini dell' equazioni (96 e 97).

De' massimi e minimi nelle funzioni di due variabili.

** 173. Abbiamo veduto, (art. 171), che se in una funzione di due variabili independenti x, y si metteva $x+h$ in luogo di x, ed $y+h$ in luogo di y,

lo sviluppo $f(x+h, y+k)$ si avea dall' equazione (96). Se in questa equazione rappresentisi $f(x+h, y+k)$ con U, k con mh, e $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$ da $\frac{d^2u}{dxdy}$, avremo

$$U=u+h\left(\frac{du}{dy}m+\frac{du}{dx}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}m^2+\right.$$

$$\left.2\frac{d^2u}{dxdy}m+\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\textit{termini in } h^3 \text{ ecc.} \ldots(98).$$

Affinché u sia un massimo o un minimo, bisogna che U sia sempre più grande o più piccolo di u, qualunque valore diasi agli accrescimenti h e k; or ciò non è possibile, che quando è nullo il termine $h\left(\frac{du}{dy}m+\frac{du}{dx}\right)$, poicchè se ciò non fosse, questo termine, (art 89), potendo divenire più grande della somma algebrica di tutti gli altri che seguono, mediante un convenevole valore di h; prendendo successivamente questo valore negativo e positivo, si farebbe, in uno de' casi, U più grande, e nell' altro più piccolo di u; perciò, affinchè la funzione u sia un massimo o un minimo, bisogna che si abbia

$$h\left(\frac{du}{dy}m+\frac{du}{dx}\right)=0,$$

o piuttosto

$$\frac{du}{dy}m+\frac{du}{dx}=0.$$

Essendo arbitrario l' accrescimento k, lo stesso dee essere m; per conseguenza questa equazione ha

e si vede ch' essa avrà sempre lo stesso segno di A, se avendo A e C lo stesso segno, si ha $\frac{C}{A} > \frac{B^2}{A^2}$,

cioè $AC > B^2$; poichè allora la quantità moltiplicata da $\frac{1}{2} Ah^2$ sarà essenzialmente positiva, el segno dell' espressione (100) dipenderà da quello di A, in guisacchè si avrà un massimo o un minimo, secondocchè A sarà negativo o positivo, cioè secondo il

segno di $\frac{d^2u}{dy^2}$, ch' è lo stesso di $\frac{d^2u}{dx^2}$, perchè si è

veduto che C ed A si erano supposti essere dello stesso segno **.

Della trasformazione delle coordinate rettangolari in coordinate polari.

175. Esaminiamo una curva BDC (Fig. 38), Fig.38 nella quale siasi determinato il sito di un punto M, mediante le coordinate rettangolari $AP = x$, $PM = y$; questo punto può esser egualmente determinato, mediante l' angolo MAC, el raggio vettore AM; ma come ordinariamente gli angoli si misurano cogli archi, perciò in luogo dell' angolo MAC, metteremo l' arco *mo*, descritto con un raggio preso per unità; perciò chiamando *t* quest' arco *mo*, ed *u* il raggio vettore AM, potremo sostituire il sistema delle coordinate polari *t* ed *u* a quello delle coordinate rettangolari $AP = x$, e $PM = y$.

176. Bisogna osservare che l' origine delle ascisse è qualche volta situato in un luogo diverso da *o*, poichè il punto M è egualmente determinato, allorchè dopo aver preso un punto *o'* per origine, sia dato l' arco *o'm*, el raggio vettore AM; in questo caso pos-

siamo rappresentare $o'm$ con t', ed allora tutte le ascisse contate dall' origine o', differiranno dalle ascisse contate dall' origine o, per una quantità costante oo', e vi sarà fra esse la seguente relazione

$$t=t'-oo'.$$

Poicchè per mezzo di questa relazione, si può sempre cambiare di origine nel modo che conviene, supporremo, per maggiore semplicità, l' origine in o.

177. Rappresentiamo ora con $F(x,y)=o$ l' equazione, nella quale vogliamo cambiare le coordinate rettangolari $AP=x$ e $PM=y$, in coordinate polari $om=t$, od $AM=u$, e cerchiamo le relazioni ch' esistono tra queste coordinate; avremo evidentemente

$$AP=AM\cos MAP,\ PM=AM\operatorname{sen} MAP,$$

o

$$x=u\cos t\qquad,\ y=u\operatorname{sen} t\ \ldots\ (101):$$

Basterebbe dunque di sostituire questi valori nell' equazione rappresentata da $F(x,y)=o$, per ottenere quella che sarebbe rapportata a delle coordinate polari.

178. Se l' origine delle coordinate rettangolari x,y non è al centro A della curva (Fig. 39), siano x',y' le coordinate contate dall' origine A', ed a, b le coordinate contate dal centro A, si avrà

Fig.39

$$AP=A'Q-A'B,\ MP=MQ-AB$$

o

$$x=x'-a\qquad y=y'-b,$$

valori che si sostituiranno nelle formole precedenti.

Della trasformazione delle coordinate polari in coordinate rettangolari, e determinazione dell' espressione differenziale dell' arco in una curva polare.

179. Se una equazione rapportata a delle coordinate polari sia rappresentata da $F(t,u)=o$, si vede

(Fig. 38) che u può essere rimpiazzato dal suo valore tirato dall' equazione

$$AM^2=AP^2+PM^2\text{ , o}$$

$$u^2=x^2+y^2\ldots(102):$$

Rispetto a t, l' equazioni (101) divise l'una per l'altra, ci danno

$$\frac{y}{x}=\frac{\text{sen}t}{\cos t}=\text{tang}\,t\,,$$

da cui si ha

$$t=\text{arc}(\text{tang}=\frac{y}{x}).$$

Questo valore di t e quello di u sostituiti nell' equazione $F(t,u)=o$, si ha

$$F\ \text{arc}\,(\text{tang}=\frac{y}{x}),\sqrt{(x^2+y^2)}]=o\ldots(103).$$

Così si perviene ad una equazione tra x ed y, ed affetta da una quantità trascendente.

180. Si può ancora ottenere tra x ed y un' equazione, che non contenga la trascendente $\text{arc}(\text{tang}=\frac{y}{x})$, ma che racchiuda de' differenziali: a tal oggetto, si differenzierà l' equazione rappresentata dalla formola (103), o, come si pratica, s' impiegherà il seguente metodo, per arrivare a questo scopo. Rappresentiamo sempre per mezzo di $F(u,t)=o$ l' equazione che si tratta di trasformare in una funzione di coordinate rettangolari x ed y; abbiamo veduto (art. 179), che il valore di u potea esprimersi con x ed y, senza quantità trascendente, ma che non era lo stesso di t; perciò cercheremo primieramente eliminare t tra $F(t,u)=o$, el differenziale di questa equazione, che rappresentere-

mo con $F(t, u\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)=o$; in verità noi introdurremo nel risultamento dell' eliminazione, i differenziali $\mathrm{d}t$, e $\mathrm{d}u$; ma questi potranno esprimersi in funzione delle variabili x, y, $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$. In fatti, l'equazioni (101) ci danno

$$\cos t=\frac{x}{u}\ ;\ \operatorname{sen} t=\frac{y}{u} \ldots (104)\ :$$

dividendo l' una di queste equazioni per l'altra, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \text{ o } \operatorname{tang} t=\frac{y}{x}\ ;$$

differenziando ne viene

$$\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}\ ;$$

mettendo in luogo di $\frac{1}{\cos^2 t}$ il suo valore tirato dalla prima dell'equazioni (104), e supprimendo il divisore comune x^2, si trova

$$u^2\mathrm{d}t=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,$$

e per conseguenza

$$\mathrm{d}t=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{u^2}\ ;$$

e mettendo per u il suo valore, questa equazione diverrà

$$\mathrm{d}t=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

Il differenziale dell' altra variabile si trova ancora più facilmente; poichè l'equazione (102) ci dà

$$u=\sqrt{(x^2+y^2)}\ ;$$

differenziando si avrà

$$du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

per mezzo di questi valori di dt, di du e di u, si cambierà l'equazione avuta, dietro l'eliminazione di t, in un'altra che non conterrà più, se non x, y, dx, dy, e che per conseguenza si rapporterà alle coordinate rettangolari.

181. Si è veduto, (art. 159), che il differenziale di un arco z rapportato alle coordinate rettangolari, aveva per espressione

$$dz=\sqrt{(dx^2+dy^2)} \dots (106).$$

Si può determinare benanche il differenziale dello stesso arco, allorchè le coordinate sono polari; in questo caso si sostituiranno nell'equazione (106) i valori di dx, e di dy tirati dall'equazioni

$$x=u\cos t,\ y=u\,\text{sen}\,t,$$

e si troverà, differenziando quest'equazioni

$$dx=-u\,\text{sen}\,t\,dt+\cos t\,du$$

$$dy=u\cos t\,dt+\text{sen}\,t\,du.$$

Elevando quest'equazioni a quadrato, e riducendo coll'ajuto della formula

$$\text{sen}^2 t+\cos^2 t=1,$$

si otterrà

$$dz=\sqrt{(u^2dt^2+du^2)}.$$

Questo è il differenziale dell'arco in funzione delle coordinate polari.

Delle sottangenti, sunnormali, normali, e tangenti alle curve polari.

182. Si sa che nelle curve a coordinate rettangolari, la sottangente Pt (Fig. 40) è sempre compresa tra il piede P dell'ordinata ed il punto t, in cui una perpendicolare At a questa ordinata viene ad incontrare la tangente; conservando la stessa definizione per le curve polari, nelle quali l'ordinata non è più PM, ma il raggio vettore AM, la sottangente sarà allora la perpendicolare AT compresa tra il punto A e l'incontro T di essa colla tangente. Dunque nelle curve polari la sottangente ha una posizione diversa da quella che appartiene a curve che tali non sono; poichè in queste la sottangente è sempre presa sull'asse delle ascisse, mentre che nelle curve polari, ove quest'asse non esiste, la sottangente varia di posizione in ogni punto della curva.

Fig.40

183. Determiniamo ora l'espressione analitica della sottangente nelle curve polari. A tal oggetto siano AM, ed AM' (Fig. 41) due raggi vettori, e dal punto M meniamo la perpendicolare MP sul raggio vettore AM', e conduciamo AT parallela a questa perpendicolare; i triangoli simili ATM', PMM' ci daranno la proporzione

Fig.41

$$PM' : PM = AM' : AT;$$

da cui si tira

$$AT = \frac{AM' . PM}{PM'};$$

ed osservando che PM' è un lato del triangolo rettangolo PMM', questo valore di AT diviene

$$AT = \frac{AM' . PM}{\sqrt{(MM'^2 - PM^2)}};$$

Nel caso del limite, AM' è eguale ad AM, cioè ad u, PM si confonde coll'arco MN, la corda MM'

coll' arco MM', ed AT diviene la sottangente. Non si tratta dunque, che di avere, nell' ipotesi del limite, l' espressioni di MM' e di MN'; la prima di queste espressioni non è che il differenziale dell' arco della curva; dunque, art. (181)

Fig. 41

$$M'M = \sqrt{(u^2 dt^2 + du^2)};$$

per rispetto ad MN, i settori ARR', ed AMN ci danno la proporzione

$$AR : RR' = AM : MN,$$

o

$$r : RR' = u = MN,$$

dunque $MN = u . RR'$, quantità, che, nel caso del limite, riducesi ad udt. Mettendo questi valori di MN, e di M'M in quello di AT, dopo di aver cambiato AM' in u, e PM in MN, e riducendo, troveremo

$$AT = \frac{u^2 dt}{du}.$$

Questa è l' espressione della sottangente.

184. Per determinare la sunnormale, osserveremo che la normale SM (Fig. 40) essendo perpendicolare alla tangente, l' ordinata AM dee essere media proporzionale tra la sottangente, e la sunnormale; per conseguenza avremo

Fig. 40

$$AT : AM = AM : \textit{sunnormale}$$

o

$$\frac{u^2 dt}{du} : u = u : \textit{sunnormale};$$

dunque sarà

$$\textit{sunnormale} = \frac{du}{dt}.$$

Per riguardo alla normale, ed alla tangente, i triangoli rettangoli MAS, MAT danno

$$MS=\sqrt{(MA^2+AS^2)},\ MT=\sqrt{(MA^2+AT^2)}:$$

Sostituendo in quest' equazioni i valori di MA, di AS, e di AT, troveremo

$$normale=\sqrt{\left(u^2+\frac{du^2}{dt^2}\right)},\ tangente=u\sqrt{\left(1+u^2\frac{dt^2}{du^2}\right)}.$$

185. Per trovare l'espressione analitica del settore nelle curve polari, il triangolo AM'M (Fig. 41) ci da

Fig. 41

$$aja\ \text{AM'M}=\frac{\text{AM}'.\text{PM}}{2};$$

nel caso del limite, l'aja del triangolo AM'M diviene quella di una settore elementare, la perpendicolare PM può essere rimpiazzata dall' arco MN, che abbiamo trovato eguale ad udt, ed AM' riducesi ad u. Sostituendo questi valori nell' equazione precedente troveremo

$$aja\ del\ settore\ elementare=\frac{u^2dt}{2}.$$

Si può benanche esprimere il settore elementare in funzione delle coordinate rettangolari, poichè mettendo in questa equazione i valori di u e di dt dati dall' equazioni (102, e 105), essa diviene

$$aja\ del\ settore\ elementare\ \frac{xdy-ydx}{2}.$$

Della determinazione del raggio di curvatura di una curva polare.

** 186. Abbiamo dato, art. 149, l'espressione del raggio di curvatura, per rispetto alle coordinate rettangolari; riservandoci la facoltà di dare a questa

espressione il segno che renderà γ positivo, noi lo scriveremo così

$$\gamma = \frac{\left(1-\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots (107).$$

Per avere questo valore di γ espresso in funzione delle coordinate polari, non si tratta che di eliminare i coefficienti differenziali, che entrano in questa espressione, per mezzo delle seguenti equazioni

$$x = u\cos t\,,\quad y = u\,\mathrm{sen}\,t\,;$$

differenziamo quest' equazioni, e dividiamo in seguito i risultamenti, l' uno per l' altro; otterremo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du\,\mathrm{sen}\,t + u\cos t\,dt}{du\cos t - u\,\mathrm{sen}\,t\,dt};$$

rappresentiamo con m, ed n i due termini di questa frazione, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} m = du\,\mathrm{sen}\,t + u\cos t\,dt \\ n = du\cos t - u\,\mathrm{sen}\,t\,dt \end{array}\right\} \ldots (108)$$

e per conseguenza sarà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \ldots (109)$$

o

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Per mezzo di questa equazione, il valore del numeratore di γ diviene

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{n^2+m^2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

elevando ogni termine di questa frazione alla potenza $\frac{3}{2}$, e riflettendo che la potenza $\frac{3}{2}$ di n^2 è n^3, si ha

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}{n^3} \quad \ldots(110);$$

differenziando in seguito l'equazione (109), si troverà

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{ndm-mdn}{n^2};$$

dividendo il primo membro di questa equazione per dx, el secondo per n, che equivale a dx, avremo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ndm-mdn}{n^3} \ldots (111)$$

Per mezzo de' valori dati dall' equazioni (110), e (111), l' equazione (107) diviene

$$y=\frac{(n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}{ndm-mdn} \ldots (112)$$

Tutto ora si riduce a trasformare questa equazione in una funzione di t e di u. A tal oggetto, si determinerà primieramente il valore di n^2+m^2, sommando i quadrati dell'equazioni (108); e riducendo per mezzo dell' equazione $\text{sen}^2 t+\cos^2 t=1$, si troverà

$$n^2+m^2=du^2+u^2dt^2 \ldots (113)$$

Per rispetto al denominatore dell' equazione (112), differenzieremo successivamente l' equazioni (108) trattando dt come costante; e moltiplicando i rispettivi risultamenti per n ed m, troveremo

$$ndm=nd^2u\,\text{sen}t+2ndu\cos t dt-nu\,\text{sen}t dt^2$$
$$mdn=md^2u\cos t-2mdu\,\text{sen}t dt-mu\cos t dt^2;$$

togliendo la seconda equazione dalla prima, si troverà

$$\left.\begin{array}{l} ndm-mdn=d^2u(n\text{sen}t-m\cos t) \\ +2dudt(n\cos t+m\text{sen}t) \\ -udt^2(n\text{sen}t-m\cos t) \end{array}\right\} \ldots (114);$$

moltiplicando la seconda dell' equazioni (107) per $\text{sen}t$, e la prima per $\cos t$; e togliendole l' una dall' altra, e riducendo per mezzo della relazione $\text{sen}^2 t+\cos^2 t=1$, otterremo

$$n\text{sen}t-m\cos t=-udt$$

Operando similmente per formare il valore di $n\cos t+m\text{sen}t$, si avrà

$$n\cos t+m\text{sen}t=du;$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (114), questa diverrà

$$ndm-mdn=-ud^2udt+2du^2dt+u^2dt^3\ldots(115)$$

Per mezzo de' valori che abbiamo determinato, l' equazioni (113), e (115) cambieranno l' equazione (112) in

$$y=\frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2dt-ud^2udt+u^2dt^3}.^{**}$$

Delle curve trascendenti.

187. Si chiamano curve trascendenti quelle le di cui equazioni contengono quantità trascendenti, o in generale che non possono essere espresse da un numero finito di termini algebrici. Faremo conoscerne alcune degne di maggiore attenzione.

Della spirale di Archimede o di Conone.

188. Ecco in che modo può intendersi generata la spirale di Archimede (Fig. 16): Mentre il raggio AB Fig. 16 descrive tutto il cerchio, un punto A percorre AB, mo-

Fig.16 vendosi con moto uniforme; in modo che il punto mobile il quale era in A al principio della rotazione di M, si trovi in B, quando B ha fatto un intero giro intorno al centro A. Il punto mobile in questo movimento descrive la spirale di Archimede.

Siano AB$=a$, arc BN$=t$, AM$=u$; dietro la precedente definizione si avrà

$$AM : AN = \text{arc } NB : BCD ;$$

o

$$u : a = t : 2\pi a ;$$

da cui si deduce

$$u = \frac{t}{2\pi}$$

Questa curva non ha, come si vede, coordinate rettangolari. Allorchè AB ha descritto l'intero cerchio, l'arco NB equivale alla circonferenza; dunque allora $t=2\pi a$, il che cambia l'equazione precedente in

$$u = \frac{2\pi a}{2\pi} = a .$$

Se il punto A continua a muoversi sempre uniformemente, il raggio AB descriverà una seconda circonferenza intorno al centro A; e se si prende BA'=BA, il punto mobile arriverà in B', al termine di questa seconda rotazione: allora t sarà eguale a $4\pi a$, il che darà $u=2a$; e così in seguito.

Della spirale logaritmica.

189. La spirale logaritmica è una curva polare, Fig.40 (Fig.40), nella quale l'angolo AMT formato dal raggio vettore AM colla tangente MT alla curva, è costante. Perciò, chiamando a la tangente trigonometrica dell'angolo AMT, avremo

$$\text{tang} AMT = a ;$$

ora il triangolo TMA, rettangolo in A, ci dà la proporzione

$$1 : \text{tang AMT} = \text{AM} : \text{AT} :$$

dunque sarà

$$\text{tang AMT} = \frac{\text{AT}}{\text{AM}} :$$

mettendo u in luogo del raggio vettore AM, ed in luogo di AT l'espressione $\frac{u^2 dt}{du}$, che abbiamo trovato (art. 183), per la sottangente di una curva polare, avremo

$$\text{tangAMT}, \text{ o } a = \frac{udt}{du};$$

da cui si otterrà

$$\frac{adu}{u} = dt \ldots (116);$$

ed integrando, troveremo

$$a\log u = t + costante.$$

Sia e la base del sistema Neperiano; se a si riguarda come il logaritmo di e, in un dato sistema di tavole, potrà Le mettersi in luogo di a, ed allora Le log$u$ rappresenterà il logaritmo di u in questo sistema *; in guisachè avremo

$$Lu = t + \textit{costante}$$

190. La spirale logaritmica può costruirsi per asse-

* Per dimostrarlo, sia e la base del sistema Neperiano; avremo $u = e^{\log u}$; prendendo i logaritmi nel sistema delle tavole indicato da L, si avrà

$$Lu = L(e^{\log u}) = \log u Le.$$

Fig. 42 gnazione di punti nel seguente modo : (Fig. 42) dopo di aver divisa la circonferenza $OO'O''$ in parti eguali, si meneranno de' raggi a' punti di divisione, e sopra questi si prenderanno le parti Am, Am', Am'', Am''' ec. che siano in progressione geometrica ; i punti m, m', m'', m''', m'''', ec. apparterranno ad una spirale logaritmica. Infatti, supponendo che le parti mm', $m'm''$, $m''m'''$, ec. abbiano picciolissima estensione, potranno esser riguardate come rette ; ed allora sarà facile dimostrare che i triangoli Amm', $Am'm''$, $Am''m'''$ ecc. sono simili ; infatti gli angoli in A sono eguali per costruzione, e gli angoli $mm'A$, $m'm''A$, $m''m'''A$ ec. lo sono per la proprietà principale della curva ; abbiamo dunque questa serie di proporzioni

$$Am : Am' = Am' : Am''$$
$$Am' : Am'' = Am'' : Am'''$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.}$$

ciocchè dimostra che le ordinate Am, Am', Am'', Am''' ec. sono in progressione geometrica.

** 191. Nella spirale logaritmica, la normale è eguale al raggio di curvatura. Infatti, poichè l' espressione di questo raggio in una curva polare è, (art. 186),

$$\gamma = \frac{(du^2 + u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2dt - ud^2udt + u^2dt},$$

bisognerà mettere in questa formola, i valori di du, e di du^2 tirati dall' equazione della spirale logaritmica ; or l' equazione (116) ci da

$$du = \frac{udt}{a}, \; d^2u = \frac{du}{a}dt = \frac{udt^2}{a^2};$$

sostituendo questi valori in quello di γ, si avrà

$$\gamma = \frac{\left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{u^2}{a^2} + u^3} = \left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)}.$$

Da un' altra parte, se nell' espressione della normale, che è, (art. 184.)

$$\sqrt{(u^2 + \frac{du^2}{dt^2})},$$

sostituiscasi il valore di $\frac{du^2}{dt^2}$, troveremo egualmente $\sqrt{(\frac{u^2}{a^2} + u^2)}$; ciocchè pruova che in questa curva, la normale è eguale al suo raggio di curvatura, e come d' altronde esso è diretto nel senso della stessa normale, (art. 155), ne risulta che queste linee si confondono.

192. Da questa proprietà ne dedurremo la dimostrazione, che l' evoluta della spirale logaritmica è un' altra spirale logaritmica. A tal oggetto, considerando il punto M della normale, come appartenente al raggio di curvatura, e come situata sull' estremità di questo, esso è sull' evoluta. Siano (Fig. 43) t' ed u' le coordinate di questo punto, sarà facile di determinarle in funzione delle coordinate t, u del punto M della curva; poichè sia oo' un arco di cerchio descritto con un raggio eguale all' unità; le ascisse de' punti M ed N differiranno tra loro per quanto è la lunghezza di questo arco, il quale, a causa dell' angolo retto MAN', sarà eguale al quarto della circonferenza; se, adottando la notazione in uso, rappresentiamo con $\frac{\pi}{2}$ il quarto della circonferenza descritta col raggio eguale ad 1, avremo $t' = t + \frac{\pi}{2}$, equazione, la quale, differenziata, ci darà Fig. 43

$$dt = dt'.$$

Da un' altra parte, l'ordinata polare u' del punto N dell'evoluta, essendo eguale alla sunnormale $\frac{du}{dt}$, della spirale logaritmica, cambieremo $\frac{du}{dt}$ in u nell'equazione di questa curva, ed avremo $u = au'$; e perciò $du = adu'$; Sostituendo questi valori di dt, du, e di u nell' equazione (116) della spirale logaritmica, troveremo

$$a\frac{du'}{u'} = dt',$$

equazione, che avendo la stessa forma della precedente, c' insegna che la spirale logaritmica ha per evoluta un' altra spirale logaritmica.**

Della spirale iperbolica, e delle spirali comprese nell' equazione $u = at^n$.

193. La proprietà caratteristica della spirale iperbolica è di avere una sottangente costante. Se questa sottangente rappresentisi con a, ne eguaglieremo il valore a quello della sottangente (art. 183) di una curva polare, ed avremo per l' equazione della spirale iperbolica

$$u^2\frac{dt}{du} = -a;$$

Noi prendiamo la costante a negativa, perchè allora si ha

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{a},$$

equazione, ch' essendo integrata, da

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + C;$$

o rimpiazzando la quantità indeterminata C con un altra quantità $\frac{C'}{a'}$ avremo

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + \frac{C}{a};$$

prendendo l' origine di t, in modo che l' ascissa $t+C'$ sia eguale ad una nuova ascissa t', l' equazione precedente diverrà

$$\frac{1}{u} = \frac{t'}{a},$$

o piuttosto

$$u = \frac{a}{t'} \ldots (117);$$

ciocchè dimostra, che allorchè $t'=o$, $u=\infty$; d' onde segue che il raggio vettore che corrisponde al punto, ove t' è nullo, è un asintoto della curva.

194. L' equazione (117) ci mostra ancora che il raggio vettore è in ragion inversa dell' ascissa; se facciamo successivamente $t=2\pi$, $t=4\pi$, $t=6\pi$ ecc.; avremo questa serie di valori per u, $\frac{a}{2\pi}$, $\frac{a}{4\pi}$, $\frac{a}{6\pi}$, ecc.; il che c' insegna, che al termine di due rivoluzioni, il raggio vettore trovasi ridotto alla metà di ciocch' era alla fine della prima; che al termine di tre rivoluzioni, trovasi ridotto al terzo, e così in seguito.

195. L' equazione della spirale iperbolica, come quella della spirale di Conone sono casi particolari dell' equazione $u=at^n$; poicchè facendo $n=1$, ed $a = \frac{1}{2\pi}$, si ottiene la prima; e facendo $n=-1$, si

ottiene la seconda. Tra le spirali determinate da questa equazione, si distingue ancora la spirale parabolica, la quale si trova facendo $n=2$.

Della Logaritmica.

196. La logaritmica è una curva a coordinate rettangolari, nella quale l'ascissa è il logaritmo dell'ordinata; dunque l'equazione di questa curva è

$$x=\log y$$

da cui si ottiene

$$y=a^x$$

e per conseguenza

$$\frac{dy}{dx}=a^x \log a.$$

197. Per discutere questa equazione, facciasi $x=0$; si avrà $y=1$; se in seguito si danno ad x de' valori crescenti, e positivi, y andrà sempre crescendo; ma se si da ad x un valore negativo $-u$, si troverà

$y=a^{-u}=\frac{1}{a^u}$; e si vede che l'ordinata tanto più diminuirà, quanto più si allontanerà dall' origine, nel senso delle ascisse negative; e che infine la curva non potrà raggiugnere il prolungamento dell' asse delle x, che all' infinito, nel qual caso solamente l'equazione $y=\frac{1}{a^u}$, diverrebbe $y=\frac{1}{a^\infty}=0$: da ciò si può conchiudere che il prolungamento dell' asse delle x è un asintoto della curva.

198. Se, a partir dall' origine, si prendano delle ascisse eguali, (Fig. 17), $AP=u$, $AP'=-u$, si avrà

Fig. 17

$$PM=a^u,\ P'M'=\frac{1}{a^u};$$

dunque si avrà

$$PM . P'M' = 1 .$$

199. La proprietà più rimarchevole di questa curva è che la sottangente ha un valor costante: infatti differenziando l' equazione della logaritmica, si ha

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a ;$$

da cui si ottiene

$$\frac{a^x dx}{dy} = \frac{1}{\log a} , \quad o \quad \frac{y dx}{dy} = \frac{1}{\log a} .$$

Or il primo termine di questa equazione esprime la sottangente della curva, (art 69), dunque questa è costante.

Della Cicloide.

200. La cicloide è una curva che vien descritta dal movimento di un punto N (Fig. 18), situato sulla circonferenza di un cerchio, che rota su di una retta HH'. È chiaro, che in questo movimento di R verso H, tutt' i punti dell' arco RN vanno successivamente ad applicarsi sulla retta RH, finchè il punto N a suo luogo va a cadere sopra H; per conseguenza, l' arco RN sarà eguale alla retta RH.

Fig. 18.

Tutt' i punti, pe' quali passa il punto N in questo movimento, trovandosi per ipotesi sulla cicloide, il punto H si troverà benanche sopra di questa curva: prendiamolo per origine delle ascisse, ed abbassiamo la perpendicolare NK sul diametro RR'; facciasi $HP = x$, $PN = y$, $RR' = 2a$, arco $NR = z$, $NK = u$, si avrà

$$HP = HR - PR ;$$

o

$$x = \text{arc } NR - NK ,$$

cioè

$$x = z - u \ldots (118)$$

Prima di tutto elimineremo l'arco z nel modo seguente: si differenzierà l'equazione precedente, ciocchè ci darà

$$dx = dz - du \ldots (119).$$

Per avere il valore di dz in funzione di u, osserveremo che tra u e z si ha la relazione

$$u = \operatorname{sen} z$$

questa equazione differenziata, (art. 42), da

$$du = dz \frac{\cos z}{a},$$

da cui si ottiene

$$dz = \frac{a du}{\cos z}.$$

In questa equazione si sostituirà a $\cos z$ il valore che si ha dall' equazione

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = a^2,$$

o piuttosto

$$u^2 + \cos^2 z = a^2;$$

e si avrà

$$dz = \frac{a du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione (191), si avrà

$$dx = \frac{a du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}} - du \ldots (120).$$

Ora non si dee far altro che esprimere u in funzione di y. A tal oggetto sia O il centro del cerchio generatore RNR'; avremo

$$OK = \sqrt{(\overline{ON}^2 - \overline{NK}^2)},$$

o

$$a - y = \sqrt{(a^2 - u^2)} \ldots (121);$$

elevando questa equazione a quadrato, e riducendo, sarà

$$u=\sqrt{(2ay-y^2)} \dots (122)$$

e differenziando

$$du=\frac{(a-y)dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \dots (123)$$

L'equazioni (121) (123) trasformano l'equazione (120) in

$$dx=\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}-\frac{(a-y)dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}};$$

riducendo si trova

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}:$$

questa è l'equazione della cicloide.

201. Si può ottenere ancora l'equazione della cicloide in funzione dell'arco nel modo seguente: l'equazione $u=\text{sen}z$ da

$$z=\text{arc}(\text{sen}=u);$$

mettendo per u il suo valore dedotto dall'equazione (122), si avrà

$$z=\text{arc}[\text{sen}=\sqrt{(2ay-y^2)}];$$

sostituendo questo valore, e quello di u nell'equazione (118), si avrà

$$x=\text{arc}[\text{sen}=\sqrt{(2ay-y^2)}]-\sqrt{(2ay-y^2)}^* \dots (124)$$

---

* Il seno qui corrisponde al raggio a; quello delle tavole sarebbe

$$\frac{\sqrt{(2ay-y)^2}}{a}$$

202. Per discutere questa equazione, andiamo prima di tutto a dimostrare, che y non può essere negativo, nè maggiore di $2a$: Infatti se vi si fa $y=-y'$, l'espressione arc[sen$=\sqrt{(2ay^2-y)}$] diverrà arc[sen$=\sqrt{(-2ay'-y')}$], valore imaginario. In secondo luogo se si fa $y=2a+\delta$, l'espressione arc[sen$=\sqrt{(2ay-y^2)}$], diviene arc[sen$=\sqrt{(-2a\delta-\delta^2}$], valore imaginario: dunque se ad una distanza (Fig. 19) BD$=2a$ dall' asse delle ascisse si meni AA' paralella a CC', la curva sarà compresa tra le paralelle AA', CC'.

Fig. 19

Il maggior valore che possa aver y è $2a$, poichè se si fa rotare il cerchio generatore da H fino ad H' (Fig. 18), il punto N che prima era in H si eleverà successivamente finchè arriva in D' all' estremità del diametro DD': allora l'ascissa HD sarà eguale ad DFD', cioè alla semicirconferenza del cerchio generatore.

Fig. 18

Questo risultamento è conforme a quello che si ha dall'equazione (124), poicchè se si fa $y=2a$, si trova $x=$arc(sen$=0$); or l'arco, il cui seno è zero, dee essere uno de' seguenti o, DFD', 2DFD', 3DFD' ecc.; e si vede che nel presente caso questo arco è DFD'.

Il punto N giunto in D', dopo di aver descritto l'arco HD' di cicloide, se continua a muoversi, descriverà un secondo arco D'H' simile al primo; infine se il cerchio generatore continua sempre a rotare sopra l'asse delle ascisse, il punto N genererà una serie indefinita di archi di cicloide CB'C', C'B''H' ecc. Il cerchio generatore potendo anche muoversi nel senso di A verso H, il punto N descriverà ancora una serie indefinita di archi AB'A', A'B''H ecc.

L'unione di tutti questi archi è ciocchè forma la cicloide nel senso più generale.

Se si volesse introdurre questo seno, bisognerebbe scrivere

$$x=a.\text{arc}\left[\text{sen}=\frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{a}\right]-\sqrt{(2ay-y^2)}.$$

203. La normale al punto N segnato dalle coordinate x, y (Fig. 19) è determinata dalla formola, (art. 70), Fig. 19

$$normale = y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)};$$

Se in questa formola si sostituisca il valore di $\frac{dy}{dx}$ dedotto dall'equazione della cicloide, si troverà

$$normale = y\sqrt{\left(\frac{2ay-y^2}{y^2}+1\right)} = \sqrt{(2ay)}.$$

Per costruire questo valore, menisi la corda ND; si avrà

$$DE : ND = ND : DB,$$

o

$$y : ND = ND : 2a;$$

dunque

$$\text{corda } ND = \sqrt{(2ay)}:$$

e come, per la natura del cerchio l'angolo BND è retto, la corda NB sarà perpendicolare all' estremità della normale ND; dunque la corda NB prolungata è tangente della cicloide al punto N; poichè si sa che la tangente e la normale formano tra loro un angolo retto.

Si potrebbe dunque costruire la tangente al punto N, con descrivere il semicerchio generatore BND, e con prolungare la corda BN; ma per evitare di costruire questo cerchio generatore ad ogni punto della curva, basterà di costruire il semicerchio generatore sulla più grande ordinata DD' della cicloide (Fig. 18), e dopo di aver condotto dal punto N la perpendicolare N'E sopra DD', si tirerà la corda D'F: allora la N'T paralella a questa corda sarà la tangente cercata: questa costruzione è una conseguenza di ciocchè abbiamo detto. Fig. 18

204. Per aver l'espressione del raggio osculatore della cicloide, bisogna dedurre dall' equazione di que-

sta curva i valori di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{dy^2}{dx^2}$, che sostituiremo nell' espressione del raggio d' osculo, art. 150.

$$\gamma = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

nel quale adottiamo il segno negativo, perchè sappiamo che la curva volge la sua concavità all' asse delle ascisse.

L' equazione della cicloide ci da immediatamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{y} \ldots (125).$$

Per avere $\frac{d^2y}{dx^2}$, facciasi $\frac{dy}{dx}=p$, si avrà

$$p=\frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{y}=\sqrt{\left(\frac{2a}{y}-1\right)};$$

e differenziando, (art. 23), si avrà

$$dp=-\frac{\frac{2a}{y^2}dy}{2\sqrt{\left(\frac{2a}{y}-1\right)}}=-\frac{ady}{y\sqrt{(2ay-y)^2}};$$

dunque sarà

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{a}{y\sqrt{(2ay-y^2)}};$$

moltiplicando questa equazione per l' altra (125), otterremo, (art. 24),

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{a}{y^2}, \text{ o } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2};$$

per mezzo di questi valori si ha in fine

$$\gamma = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ay^{\frac{3}{2}}}{y^2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}},$$

e facendo passare y nel numeratore, si avrà

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 2.2^{\frac{1}{2}}.\ a^{\frac{1}{2}}.\ y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(2ay)}:$$

dunque il raggio osculatore NM (Fig. 19) è doppio della normale ND. Fig. 19

205. L' equazione dell' evoluta si otterrà sostituendo i valori di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{d^2y}{dx^2}$ nelle formole (art. 149)

$$y-\beta = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x-\alpha = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -(y-\beta)\frac{dy}{dx};$$

e si troverà

$$y-\beta = \frac{\frac{2a}{y}}{\frac{a}{y^2}} = 2y,\ x-\alpha = -2\sqrt{(2ay-y^2)};$$

dunque

$$\beta = -y \text{ , ed } \alpha = x + 2\sqrt{(2ay - y^2)}$$

Fig. 20 o (Fig. 20)

$$QN' = NP \text{ , } \alpha = HP + 2NK \text{ ;}$$

ed osservando che $HP + NK = HR$, l'ultima equazione può scriversi così

$$\alpha = \text{arc}N'R + NK \ldots (126).$$

Prolunghiamo R'R in R", prendiamo $RR'' = a$, e sopra RR" descrivesi la semicirconferenza RN'R" : questa passerà pel punto N' a causa delle corde eguali N'R, NR, e si avrà

$$\text{arc } NR = \text{arc } N'R \text{ , ed } NK = N'K' \text{ ;}$$

sostituendo questi valori nell'equazione (126), si troverà

$$\alpha = \text{arc}N'R + N'K' \text{ ,}$$

ossia

$$\alpha = \text{arc}N'R + \sqrt{(2a\beta - \beta^2)} \ldots (127)$$

Questa è l'equazione ch'esiste tra le coordinate $HQ = \alpha$, e $QN' = \beta$ appartenenti ad un punto N' dell'evoluta. Prolunghisi ora l'ordinata $CD = 2a$, e sul prolungamento prendasi una quantità $DH' = 2a$, e pel punto H' menisi la H'D' paralella ad HD, e trasportisi l'origine H al punto H'. A tal oggetto siano $H'Q = \alpha'$, $QN' = \beta'$: l'ascissa sarà

$$H'Q = HD - HQ \text{ ,}$$

o

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} \textit{ circonferenza generatrice} - HQ \text{ ,}$$

o

$$\alpha = \pi a - \alpha :$$

per rispetto all'ordinata β', abbiamo

$$N'Q'=H'D-QN'.$$

e

$$\beta'=2a-\beta:$$

da quest' equazioni se ne deduce

$$\alpha=\pi a-\alpha', \quad \beta=2a-\beta':$$

per mezzo di questi valori l'equazione (127) diviene

$$\pi a-\alpha'=\text{arc}N'R+\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)},$$

o

$$\pi a-\alpha'=\text{arc}RN'R''-\text{arc}\,N'R''+\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)}$$

$$=\pi a-\text{arc}N'R''+\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)};$$

e per conseguenza

$$\alpha'=\text{arc}\,N'R''-\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)}:$$

questa equazione è quella di una cicloide; dunque l' evoluta di una cicloide è un' altra cicloide.

206. Si può colla sintesi dimostrare nel seguente modo (Fig.20), che l' evoluta HH' è una cicloide. Si ha

$$\text{arc}\,R''N'+N'R=\pi a;$$

dunque

$$\text{arc}\,R''N'=\pi a-\text{arc}\,RN'$$

da un' altra parte si ha

$$\text{arc}\,RN'=\text{arc}RN=HR, \text{ art. } 148;$$

sostituendo questo valore nell' equazione precedente, si avrà

$$\text{arc}\,R''N'=\pi a-HR=HD-HR=RD$$

o

$$\text{arc}\,R''N'=H'R'',$$

che è la proprietà della cicloide.

Del cambiamento della variabile indipendente.

** 267. Allorchè è data una formola, che contiene de' coefficienti differenziali, essi non possono essere eliminati, che coll' ajuto dell' equazione della curva, alla quale questa formola si vuole applicare; così se si ha la formola

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx},$$

e si domandi cosa essa diviene, allorchè la curva è una parabola, si tireranno dall' equazione $y=ax^2$ della parabola i valori di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{dy^2}{dx^2}$, che si sostituiranno in questa formola, ed allora i coefficienti differenziali dispariranno. Se le quantità $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ si riguardino come incognite, vi bisognano in generale due equazioni per eliminarle da una formola, e queste ci saranno date, differenziando due volte di seguito l' equazione della curva.

268. Allorchè per mezzo di operazioni algebriche non figureranno più le dx sotto le dy, come nella formola seguente

$$\frac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2-yd^2y} \ldots (128),$$

si opera la sostituzione, riguardando dx, dy, e d^2y come incognite; e poicchè, per eliminarle, vi bi-

sogna in generale un egual numero di equazioni, sembra da principio che l'eliminazione non possa effettuarsi, poichè la differenziazione dell'equazione della curva non può darci che due equazioni tra dx, dy e dy^2; ma bisogna osservare, che allorchè si saranno eliminati dy e dy^2, per mezzo di queste due equazioni, si troverà nella formola un fattore comune dx^2 che svanirà.

Per esempio, se seguitiamo a supporre che la curva sia una parabola rappresentata da $y=ax^2$, differenziando questa equazione due volte di seguito, si avrà

$$dy=2axdx, \quad d^2y = 2adx^2;$$

Sostituiti questi valori nell'equazione (128), si otterrà, dopo di averne tolto il fattore comune dx^2

$$\frac{y(1+4a^2x^2)}{4a^2x^2-2ay}.$$

209. È facile a comprendersi la ragione, per cui dx^2 diviene fattore comune; poicchè quando in una formola, che prima conteneva $\frac{d^2y}{dx^2}$, e $\frac{dy}{dx}$, si è fatto scomparire il denominatore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, tutti i termini, all'infuori di quelli affetti da $\frac{d^2y}{dx^2}$ e da $\frac{dy}{dx}$, hanno dovuto acquistare il fattore comune dx^2; allora i termini ch' erano affetti da $\frac{dy^2}{dx^2}$ non più contengono dx, mentrecchè gli altri affetti da $\frac{dy}{dx}$ rac-

chiudono dx al primo grado, giacchè il prodotto di $\frac{dy}{dx}$ per dx^2 si riduce a $dydx$. In seguito, allorchè si differenzia l'equazione della curva, e che si ottengono de' risultamenti della forma $dy = Mdx$, $dy^2 = Ndx^2$, questi valori sostituiti ne' termini affetti da dy^2, e da $dydx$, li cambieranno, come gli altri termini in prodotti di dx^2.

210. Ciocchè diciamo d' una formula che contiene i differenziali de' due primi ordini potendosi applicare a quella, nelle quali questi differenziali si elevono ad ordini superiori, segue da ciò, che differenziando l'equazione della curva tante volte quanto sarà necessario, potranno sempre togliersi dalla formula proposta i differenziali che sono in essa contenuti.

211. Non sarebbe lo stesso, se la formola contenesse de' termini affetti da d^2x, da d^3x ecc., oltre i differenziali, che abbiamo esaminati; poicchè supponiamo, per esempio, che in questa formola vi entrassero i seguenti differenziali, dx, dy, d^2x, d^2y, e che differenziando due volte di seguito l' equazione rappresentata da $y=fx$, se ne deducessero queste equazioni

$$F(x, y, dy, dx)=o, \quad F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y)=o,$$

con queste due equazioni non si potrebbero eliminare, che due de' tre differenziali dy d^2x d^2y, e si vede che sarebbe impossibile di fare scomparire tutt' i differenziali della formola; vi è dunque, in questo caso, una condizione tacita espressa dal differenziale d^2x; cioè che la variabile x è essa stessa considerata come una funzione di una terza variabile, che non comparisce nella formola, e che si chiama *la variabile indipendente*; ciò diverrà chiaro, se si riflette che l' equazione $y=fx$ potrebbe nascere dal sistema delle due equazioni

$$x=\mathrm{F}t,\ y=\phi t,$$

tra le quali si fosse eliminato t; così l' equazione $y=a\dfrac{(x-c)^2}{b^2}$ si ottiene dal sistema delle due altre

$$x=bt+c,\ y=at^2,$$

e si conosce che y ed x debbano variare in virtù dell' accrescimento che t può ricevere; ma l' ipotesi che x ed y variino per degli accrescimenti dati a t, suppone, che vi siano delle relazioni tra x e t, e tra y e t; una di queste è arbitraria, poichè l' equazione che noi rappresentiamo in generale con $y=fx$, essendo, per esempio $y=a\dfrac{(x-c)^2}{b^2}$, se tra t ed x si stabilisce la relazione arbitraria $x=\dfrac{t^3}{c^2}$, questo valore messo nell' equazione $y=a\dfrac{(x-c)^2}{b^2}$ la cambierà in $y=a\dfrac{(t^3-c^3)^2}{b^2c^4}$, equazione, che, combinata coll' altra $x=\dfrac{t^3}{c^2}$, dee riprodurre per mezzo dell' eliminazione, $y=a\dfrac{(x-c)^2}{b^2}$, sola condizione, della quale si dee aver conto nella scelta della variabile t.

212. Dunque la variabile indipendente t si può determinare arbitrariamente. Per esempio si prenderà per questa variabile indipendente, la corda, l' arco, l' ascissa, o l' ordinata; se t rappresenta l' arco della curva, bisogna che si abbia $t=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; se

rappresenta la corda, e che l'origine sia al vertice della curva, si avrà $t=\sqrt{(x^2+y^2)}$; infine t potrebbe essare l'ascissa o l'ordinata, ed allora si avrebbe $t=x$, o $t=y$.

213. La scelta di una di queste ipotesi, o di qualunque altra, diviene indispensabile, onde la formola, la quale contiene de' differenziali, possa esserne sgombrata; se noi non lo facciamo sempre, è perchè supponiamo tacitamente che la variabile indipendente è stata determinata. Per esempio nel caso più ordinario ove una formola non contiene che i differenziali dx, dy, d^2y, d^3y ecc., si fa l'ipotesi di prendere la variabile indipendente per l'ascissa, poichè allora ne risulta

$$t=x,\ \frac{dx}{dt}=1,\ \frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^3x}{dt^3}=0;\ \text{ecc.}$$

e si vede che la formola non dee affatto avere differenziali secondi, terzi ecc. di x.

214. Per ristabilire la formola in tutta la sua generalità, bisogna che x, ed y siano funzioni di una terza variabile indipendente t; e che si abbia, art. 24,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt};$$

si deduce da questa equazione

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ \dots\ (129)$$

prendendo il differenziale secondo di y, ed operando sul secondo membro, come si fa per le frazioni, (art. 19,) si troverà

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx^2}{dt^2}}.$$

In questa espressione dt fa due officii; l'uno è quello d'indicare quale è la variabile indipendente t, e l'altra di entrarvi come segno di Algebra. Noi potremo considerare dt solamente sotto il secondo rapporto, senza perdere di veduta che t è la variabile indipendente; allora togliendo dt^2 come fattore comune, l'espressione precedente diverrà più semplice, scrivendola così

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2};$$

e dividendo per dx, essa diverrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

215. Operando nella stessa maniera sull' equazione (129), si vede che prendendo t per variabile indipendente, il secondo membro dell' equazione diviene identico al primo; per conseguenza, allorchè si prende t per variabile independente, non vi è che un sol cambiamento a fare nella formola, che contiene i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$, cioè di rimpiazzare questo secondo coefficiente differenziale con

$$\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

Per applicare queste considerazioni al raggio di curvatura, la cui equazione è, (art. 186)

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

nel caso che vogliasi il valore di γ, prendendo t per variabile indipendente; questa equazione diverrà

$$\gamma = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}};$$

ed osservando che il numeratore equivale a $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3}$, si avrà

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x} \dots (130)$$

216. Questo valore di γ suppone dunque che x, ed y siano funzioni di una terza variabile indipendente; ma se questa variabile dovesse essere x, cioè se si avesse $t=x$, si avrebbe $d^2x=0$, e questa formola tornerebbe ad essere quella del caso ordinario, divenendo

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

217. Ma se invece di prendere x per la variabile indipendente, si volesse che questa fosse l'ordinata, questa condizione sarebbe espressa dall' equazione $y=t$; differenziandola due volte di seguito, si avrebbe

$$\frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

La prima di queste due equazioni ci dice solamente che y è la variabile indipendente, ciocchè nulla cambia alla formola; ma la seconda ci mostra che d^2y dee esser nullo, ed allora l'equazione (130) riducesi a

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x}\ .$$

218. Bisogna osservare, che quando la variabile indipendente è x, e che per conseguenza si ha $dx^2=0$, questa equazione ci mostra che dx è costante; d' onde ne segue, che in generale la variabile, la quale viene riguardata come indipendente, ha sempre un differenziale costante.

219. Infine se si prende l'arco per variabile indipendente, si avrà

$$dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}\ ;$$

elevando a quadrato e dividendo per dt^2, questa equazione ci darà

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}=1\ ;$$

differenziando questa equazione, riguarderemo, (art. 218), dt come costante, poicchè t è la variabile indipendente; ed operando a tenore della regola degli esponenti, si troverà

$$\frac{2dx\,d^2x}{dt^2}+\frac{2dy\,d^2y}{dt^2}=0\ :$$

da cui si ha

$$dx\,d^2x=-dy\,d^2y\ ;$$

per conseguenza, se nell' equazione (130) si sostituisce il valore di d^2x, o quello di d^2y, si avrà nel primo caso

$$\gamma=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2y}\,dx=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{d^2y}\,dx,$$

e nel secondo

$$y=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2x}dy=-\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{d^2x}dy.$$

220. In ciocchè precede ci siamo solamente occupati de' due coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$; ma se la formola contenesse de' coefficienti differenziali di ordini più elevati, bisognerebbe, con de' metodi analoghi a quelli che abbiamo impiegato, determinare i valori di $\frac{d^3y}{dx^3}$, di $\frac{d^4y}{dx^4}$ ecc., che si rapporterebbero al caso, in cui x ed y sono funzioni di una terza variabile indipendente **.

Del metodo degli infinitamente piccoli.

221. Le nozioni che abbiamo dato dell' infinito riduconsi a questa proposizione: una quantità non può dirsi infinita, quando è ancora suscettibile di accrescimento. Per conseguenza se si ha $x+a$, ed x diviene infinito, bisogna supprimere a; altrimenti si supporrebbe che x può ancora aumentarsi di a, ciocch' è contro la nostra definizione.

222. Questa proposizione essendo fondamentale, io mi sono impegnato di dimostrarla in un modo più soddisfacente, nel seguente modo. Sia l' equazione

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=M\ldots(131);$$

moltiplicandola per ax, si ottiene

$$x+a=Max\ldots(132).$$

Ciò posto, supponiamo che x diviene infinito, la frazione $\frac{1}{x}$ essendo giunta all' ultimo suo grado di decrescimento, si riduce evidentemente a zero; allora l' equazione (131) diviene

$$M = \frac{1}{a}.$$

Questo valore sostituito nella equazione (132), dà

$$x + a = x.$$

Ciocchè mostra, che $x+a$ riducesi ad x nell' ipotesi di x infinito.

223. La quantità a, rispetto alla quale x è infinito, è ciocchè chiamasi un *infinitamente piccolo*, per rispetto ad x.

224. Come noi non prendiamo in considerazione che i rapporti delle quantità, la dimostrazione precedente ha luogo, anche quando x ha un valore finito, purchè però a sia infinitamente piccolo, rispetto ad x. La teorica delle frazioni dà ragione di questa verità. Infatti, se la quantità finita b si paragona alla frazione $\frac{b}{z}$, egli è certo, che quanto più il denominatore z aumenterà, tanto più diminuirà la frazione; di sorta che, questa frazione diverrà assolutamente nulla, quando z diverrà infinito; e come tale dovrà svanire in paragone di b, che in questo caso sarà infinito per rispetto a $\frac{b}{z}$.

225. Benchè due quantità siano infinitamente piccole, non ne segue però che il loro rapporto sia

nullo, poicchè $\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = a : b$. D' altronde si comprende che due quantità infinitamente piccole possono contenersi come due quantità grandissime: perciò rappresentando con dx, dy due quantità infinitamente piccole, segue da ciocchè abbiamo precedentemente detto, che non è nullo il rapporto $\frac{dy}{dx}$, risultamento conforme a quello che abbiamo ottenuto per mezzo della considerazione de' limiti.

226. Allorchè una quantità x è infinitamente piccola per rispetto ad una grandezza finita a, il quadrato x^2 è infinitamente piccolo in rapporto ad x. Infatti la proporzione $1:x = x:x^2$ ci dimostra che x^2 si contiene in x tante volte, quante x nell' unita, cioè un infinito numero di volte. Nello stesso modo si dimostrerebbe, per mezzo della proporzione $x:x^2 = x^2:x^3$, che essendo x^2 infinitamente piccolo rispetto ad x, dee esserlo ancora il termine x^3 per rispetto ad x^2; Per tal ragione gl' infinitamente piccoli sono stati divisi in differenti ordini: così negli esempii precedenti x è un infinitamente piccolo di prim' ordine; x^2 lo è di secondo ordine; x^3 è infinitamente piccolo di terzo ordine, e così in seguito.

227. Osservisi che se x è infinitamente piccolo per rispetto ad a, lo stesso dovrà dirsi di x moltiplicato per una quantità finita b. Infatti x potendo esser considerato come una frazione, il cui denominatore sarebbe infinito, può rappresentarsi con $\frac{c}{\infty}$: or, o che si abbia $\frac{c}{\infty}$, o $\frac{bc}{\infty}$, queste quantità sono egualmente nulle per rispetto ad a.

228. Come un infinitamente piccolo di prim' ordine dee svanire a fianco di una quantità finita, cui essa non può dare verun aumento, così dee svanire un infinitamente piccolo di second' ordine a fianco di quello di prim' ordine; e così in seguito.

Per esempio se si ha questa espressione

$$a+by+cy^2+dy^3,$$

e che y sia un infinitamente piccolo di prim' ordine, cy^2 ne sarà uno di second' ordine, e dy^3 di terzo; bisogna dunque togliere dy^3, perchè questo non può aumentare cy^2; e come cy^2 non può aumentare by, si cancellerà egualmente: infine si cancellerà ancora by, poichè questo infinitamente piccolo di prim' ordine non può aumentare la quantità finita a, e resterà a.

229. Due quantità infinitamente piccole x ed y danno per prodotto un infinitamente piccolo di second' ordine: infatti dal prodotto xy se ne tira la proporzione

$$1:y=x:xy,$$

Ciocchè ci fa comprendere che xy è infinitamente piccolo per rispetto ad x, come lo è y rispetto ad 1, cioè che xy è infinitamente piccolo di second' ordine.

230. Nello stesso modo si dimostrerebbe, che il prodotto di tre quantità infinitamente piccole del primo ordine da un infinitamente piccolo di terzo ordine.

231. Si può ora dar ragione della teorica della differenziazione eseguita col metodo degl' infinitamente piccoli. A tal oggetto se si suppone che in una funzione di x, la variabile x abbia un accrescimento infinitamente piccolo rappresentato da dx, in modo che x divenga $x+dx$, la differenza del nuovo stato dal primo sarà il differenziale di questa funzione.

232. Per esempio, per trovare il differenziale di

ax, poichè questa funzione diviene $a(x+dx)=ax+adx$, se se ne tolga ax, resterà adx, che sarà il differenziale di ax.

233. Cerchisi di più il differenziale di ax^3; bisognerà da $a(x+dx)^3$ toglierne ax^3; sviluppando, e riducendo, si trova in primo luogo $3ax^2dx+3axdx^2+adx^3$; ciò posto adx^3 essendo un infinitamente piccolo di terzo ordine non può aumentare $3axdx^2$; per conseguenza si cancellerà adx^3; similmente $3adx^2$, ch' è un infinitamente piccolo di second' ordine, dee esser cancellato, perchè $3ax^2dx$ è un infinitamente piccolo di prim' ordine, e resterà $3ax^2dx$, che sarà il differenziale di ax^3.

234. Facendo uso dello stesso principio, si differenzierà ogni altra funzione di x, con aver la cura di cancellare gl' infinitamente piccoli degli ordini superiori; il che riducesi a conservare il solo primo termine dello sviluppo, come appunto si fa col metodo de' limiti.

Per esempio, per trovare il differenziale di fx, in vece di scrivere

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=A+Bh+Ch^2+\text{ecc.},$$

che nel caso del limite da $\frac{dfx}{dx}\,dx=Adx$ pel differenziale di fx, si avrebbe $f(x+dx)=fx+Adx+Bdx^2+Cdx^3+$ ecc.

toglieudone la funzione primitiva, resterebbe

$$Adx+Ddx^2+Cdx^3+\text{ecc.};$$

e come si dovrebbero supprimere gl' infinitamente piccoli di ordini superiori, resterebbe il solo termine Adx, che sarebbe il differenziale cercato.

235. Per trovare il differenziale del prodotto di due variabili, y, z, si supporrà che quando x diviene

$x+dx$, y diviene $y+dy$, e z diviene $z+dz$. Il prodotto xy si convertirà allora in $(y+dy)(z+dz)$; sviluppando e togliendo yz, resterà $ydz + zdy + dydz$; L'ultimo termine di questo risultamento essendo un infinitamente piccolo di second' ordine, dovrà cancellarsi, e pel differenziale di yz resterà l' espressione $ydz + zdy$.

236. Si dedurrà in seguito da quest' ultimo differenziale quello del prodotto di un maggior numero di variabili, e finalmente quello di x^m, col metodo che abbiamo seguito, allorchè abbiamo impiegato quello de' limiti.

237. Il differenziale di a^x si otterrà ancora facilissimamente, allorchè si avrà lo sviluppo di a^{x+dx}, e questo sviluppo si troverà come quello di a^{x+h} (art. 36); in seguito si cercherà il valore di $a^{x+dx} - a^x$, e conservando il solo primo termine, si rigetteranno gli altri, come infinitamente piccoli di ordini superiori a quello del termine conservato. Dal differenziale di a^x, se ne dedurrà in seguito quello di $\log x$, come sopra si è fatto.

238. Per ciocchè riguarda il differenziale di $\operatorname{sen} x$, si ha

$$\operatorname{sen}(x+dx) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos dx + \operatorname{sen} dx \cos x - \operatorname{sen} x:$$

L' arco dx essendo infinitamente piccolo, si ha

$$\cos dx = 1, \text{ e } \operatorname{sen} dx = dx;$$

per mezzo di questi valori si trova

$$d \operatorname{sen} x = dx \cos x.$$

239. Il problema delle tangenti ha in certo modo prodotto il calcolo differenziale: ecco in qual modo si scioglie questo problema col metodo degl' infinitamente piccoli.

Sieno PM, e P'M' (Fig. 3) due ordinate infinitamente vicine; ed MQ una paralella all' asse delle ascisse; la tangente MT potrà essere considerata

Fig. 3

Fig. 3 come il prolungamento dell' elemento MM' della curva, poichè questo elemento essendo piccolissimo, può considerarsi come una linea retta: chiamisi AP, x, PM, y, l' accrescimento di x sarà $PP'=dx$, e quello di y sarà $M'Q=dy$. Il triangolo infinitamente piccolo MM'Q essendo simile all' altro MPT, si ha

$$M'Q : MQ = MP : PT,$$

o

$$dy : dx = y : PT;$$

dunque

$$PT = \frac{y dx}{dy}.$$

In seguito si troveranno la normale, la tangente, e l' equazioni di queste linee, come si è fatto negli articoli 70 e 71.

Fig. 3 240. Per avere il differenziale di un arco, si riguarderà l' arco, compreso tra le ordinate PM, e P'M' infinitamente vicine, come una linea retta; ed allora chiamando s l' arco totale, MM' sarà ds, el triangolo MM'Q darà

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2$$

o

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

estraendone la radice quadrata, sarà

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

** 241. Il differenziale dell' arco di una curva, rapportata a coordinate polari, si trova benanche facilissimamente per mezzo del metodo degl' infinitamente piccoli. Infatti (Fig. 41) siano RR', MN due archi di cerchio descritti, il primo col raggio c, e l' altro col raggio u, nell' angolo infinitamente piccolo M'AM formato da due raggi vettori, il triangolo NM'M potrà essere riguardato come rettilineo, e rettangolo in N; sicchè si avrà

$$MM'=\sqrt{(NM'^2+NM^2)};$$

ed osservando che $M'N=lu$, e che $MN=udt$, in virtù della proporzione

$$1:dt=u:MN,$$

potremo rimpiazzare NM' ed MN per mezzo de' loro valori; e, mettendo ds in luogo di MM', si avrà

$$ds=\sqrt{(du^2+u^2dt^2)}:$$

Lo stesso triangolo $MM'N$ paragonato all' altro $M'AT$ ci farà ottenere la sottangente di una curva polare per mezzo della proporzione

$$M'N:MN=M'A:AT;$$

o, rimpiazzando AM' con AM, che non ne differisce, se non per una quantità infinitamente piccola,

$$du:udt=u:AT,$$

d' onde si tira

$$AT=u^2\frac{dt}{du}.$$

Del metodo di Lagrange per dimostrare i principii del Calcolo differenziale, senza la considerazione de' limiti, degl' infinitamente piccoli, o di qualunque quantità che svanisce.

242. Abbiamo veduto di quale utilità era il teorema di Taylor nello sviluppo delle funzioni in serie. Lagrange avendo osservato che i principii della differenziazione erano rinchiusi in questo teorema, giunse a dimostrarlo, senza far uso del Calcolo differenziale, con un metodo, che anderemo a modificare nel seguente modo.

Sia $y=f(x+h)$; per la natura di questa funzione bisogna, che $f(x+h)$ riducasi a fx, allorchè si fa

$h=0$: ciò avrà luogo, se la parte che contiene h in questa equazione, è un moltiplice di h : rappresentiamola con Ph; si avrà

$$f(x+h)=fx+Ph:$$

Potendo P essere una funzione di h, se indichiamo con p la parte di P indipendente da h, quando $h=0$; e con Qh la parte che dipende da h, avremo $P=p+Qh$: continuando questo ragionamento, si avrà questa serie di equazioni

$$y=fx+Ph$$
$$P=p+Qh$$
$$Q=q+Rh$$
$$\text{ec. ec. ec.}$$

Mettendo nella prima di queste equazioni il valore di P dato dalla seconda, si avrà

$$y=fx+ph+Qh^2:$$

mettendo in questa equazione, il valore di Q preso nella terza equazione, si avrà

$$y=fx+ph+qh^2+Rh^3;$$

continuando così, e mettendo $f(x+h)$ in luogo di y, si avrà generalmente

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\text{ecc.} \quad (133).$$

243. L'espressione $f(x+h)$ rappresenta, in generale, la funzione non ancora sviluppata in serie; se in questa funzione cambiisi x in $x+i$, si avrà lo stesso risultamento, che se si fosse cambiato h in $h+i$. Infatti questa funzione non potendo racchiudere x, senza che questa variabile non sia seguita immediatamente da h, un termine della forma $A(x+h)^m$, per

esempio, diverrà $A(x+i+h)^m$, quando si sarà sostituito $x+i$ ad x; e questa quantità è la stessa di $A(x+h+i)^m$, che risulterebbe dalla sostituzione di $h+i$ in luogo di h nella funzione $A(x+h)^m$; ciocchè dicesi di questo termine, dovendo applicarsi a tutti gli altri, ne segue, che nelle due ipotesi, il primo membro dell' equazione (133) darà luogo a de' risultamenti identici; donde segue che lo sviluppo $fx+ph+qh^2+$ ecc. darà lo stesso risultamento, o rimpiazzando x con $x+i$, o h con $h+i$.

244. Sostituendo primieramente $h+i$ ad h in $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ecc., si avrà

$$fx+p(h+i)+q(h+i)^2+r(h+i)^3+\text{ecc.} \quad \ldots (134);$$

e scrivendo solamente i due primi termini di ciascuno di questi binomii, ne verrà

$$fx+ph+pi+qh^2+2qhi+rh^3+3rh^2i+\text{ecc.} \ldots (135).$$

In seguito per ottenere il risultamento della sostituzione di $x+i$ in luogo di x nell' espressione $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ecc., osservisi, che avendosi in questa serie l' effettivo sviluppo in h, questo accrescimento non entrerà in fx, e ne' coefficienti p, q, r, s ecc.; quantità le quali non potendo racchiudere che x, ne debbano essere riguardate come funzioni; e poichè l' equazione (133) ha luogo per ogni altra funzione di x, la sostituzione di $x+i$ in vece di x cambierà

$$fx \text{ in } fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ecc.}$$

$$p \text{ in } p+p'i+p''i^2+p'''i^3+p^{\text{IV}}i^4 \text{ ecc.}$$

$$q \text{ in } q+q'i+q''i^2+q'''i^3+q^{\text{IV}}i^4+\text{ecc.}$$

$$r \text{ in } r+r'i+r''i^2+r'''i^3+r^{\text{IV}}i^4+\text{ecc.}$$

$$s \text{ in } s+s'i+s''i^2+s'''i^3+s^{\text{IV}}i^4+\text{ecc.}$$

ecc. ecc. ecc. ecc.

Non v' è di bisogno prevenire, che le lettere accentate rappresentano i coefficienti delle differenti potenze di i in questi sviluppi: Sostituendo questi valori di fx, di p, di q, di r, di s ecc. nella serie $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ecc., si otterrà

$$fx+pi+qi^2+ri^3+\text{ecc.}+(p+p'i+p''i^2+\text{ecc.})h$$
$$+(q+q'i+q''i^2+\text{ecc})h^2+(r+r'i+r''i^2+\text{ecc})h^3\ \text{ec.}(136).$$

245. Questo sviluppo dovendo essere identico (art. 243) all' altro (135), bisogna che in ambidue gli sviluppi siano eguali i termini che contengono le stesse potenze di h (*nota seconda*); per conseguenza: paragonando i termini affetti da hi, da h^2i, da h^3i, ecc. di essi, si troverà

$$p'=2q,\ q'=3r,\ r'=4s,\ \text{ecc.}\ \ldots\ (137).$$

246. Abbiamo veduto, (art. 244), che p era in generale una funzione di x; sicchè rappresentando p con $f'x$, e chiamando $f''x$ il termine che moltiplicherà il coefficiente di h nello sviluppo di $f'(x+h)$; chiamando similmente $f'''x$ il coefficiente di h nello sviluppo di $f''(x+h)$, e così in seguito, avremo queste equazioni

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h)=fx+hf'x+\textit{termini}\ \text{in}\ h^2, \text{in}\ h^3, \text{ecc.} \\ f'(x+h)=f'x+hf''x+\textit{termini}\ \text{in}\ h^2, \text{in}\ h^3, \text{ecc.} \\ f''(x+h)=f''x+hf'''x+\textit{termini}\ \text{in}\ h^2, \text{in}\ h^3, \text{ecc.} \\ \text{ecc.}\qquad \text{ecc.}\qquad \text{ecc.} \end{array}\right\}\ldots(138).$$

247. Per ipotesi abbiamo, (art. 246), $p=f'x$; dunque se in questa equazione si fa $x=x+h$, si avrà

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+\text{ecc.}=f'(x+h)\ \ldots\ (139);$$

mettendo in questa equazione il valore di $f'(x+h)$ dato dalla seconda dell' equazioni (138), si avrà

$$p+p'h+p''h^2+\text{ecc.}=f'x+hf''x+\textit{termini}\ \text{in}\ h^2, \text{in}\ h^3, \text{ec.}$$

Questa equazione avendo luogo, qualunque sia il valore di h, bisogna che siano eguali i termini che contengono le stesse potenze di h; dunque sarà

$$p'=f''x;$$

Questo valore di p' cambierà la prima dell'equazioni (137) in $f''x=2q$; donde ne dedurremo

$$q=\tfrac{1}{2}f''x;$$

se in questa equazione si cambierà x in $x+h$, ne verrà

$$q+q'h+q''h^2+\text{ecc.}=\tfrac{1}{2}f''(x+h);$$

mettendo in luogo di $f''(x+h)$ il suo sviluppo dato dalla terza dell'equazioni (138), avremo

$$q+q'h+q''h^2+\text{ecc.}=\tfrac{1}{2}(f''x+hf'''x+\textit{termini}\text{ in }h^2,\text{ in }h^3,\text{ ecc.});$$

paragonando i termini che moltiplicano la prima potenza di h, avremo $q'=\frac{1}{2}f'''x$, valore, che messo nella seconda dell'equazioni (137), la cambierà in $\frac{1}{2}f'''x=3r$, d'onde si dedurrà

$$r=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}f'''x;$$

continuando così, troveremo successivamente tutti gli altri coefficienti dell'equazione (133); sostituendo in questa equazione i valori di p, di q, di r ecc., si avrà

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{2.3}f'''x+\text{ecc.}..(140)$$

248. Se si esamina ora la prima dell'equazioni (138), si vedrà che $f'x$, essendo il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$, rappresenta $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$, o $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; si-

milmente esaminando la seconda dall' equazioni (138), si vedrà, che il coefficiente $f''x$ della prima potenza di h, nello sviluppo di $f'(x+h)$ debba rappresentare

$$\frac{\mathrm{d}f'x}{\mathrm{d}x}, \text{ cioè } \frac{\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2};$$

e così in appresso; per conseguenza, sostituendo nell' equazione (140) questi valori di fx, di $f'x$, di $f''x$ ecc., si troverà

$$f(x+h) = fx + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}h + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{ec.} \quad (141).$$

249. In tal modo si arriva alla dimostrazione della formola di Taylor, senza far uso del calcolo differenziale. L' espressione $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, che entra in questa formola, è il segno dell' operazione, per mezzo della quale si ottiene il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$: trovato questo coefficiente, l' espressioni $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, ecc. c'indicano, che col ripetere la stessa operazione, potremo conoscere i coefficienti delle altre potenze di h; di sorta che non abbiamo bisogno, che di conoscere, per mezzo dell' Algebra, ciocchè dee essere $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ per ogni funzione. Per esempio se si domandasse quale è il valore di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, allorchè la funzione è x^m, si svilupperebbe $(x+h)^m$ per mezzo della formola del binomio, che darebbe $x^m + mx^{m-1}h +$ ecc., e come $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dovrebbe indicare

il coefficiente della prima potenza di h in questo sviluppo, si avrebbe $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$. In tal modo tutto riducesi a poter trovare con metodi analitici lo sviluppo delle differenti specie di funzioni, che l'Algebra può presentare: questi metodi non sono differenti da quelli, che abbiamo fatto conoscere per sviluppare le diverse funzioni, le quali per mezzo della loro combinazione, danno tutte le altre: è in tal modo che abbiamo ottenuto gli sviluppi di

$$a^{x+h}, \text{ di } \log(x+h), \text{ di } \cos(x+h), \text{ ecc.}$$

250. Ecco dunque un terzo metodo, col quale i principii del calcolo differenziale trovansi dimostrati in una maniera indipendente da ogni considerazione di limiti, infinitamente piccoli, o di quantità che svaniscono; ma questo metodo nondimeno non può escludere quello de' limiti, perchè quando si discende alle applicazioni, e che si vuole, per esempio, determinare i volumi, o le superficie, rettificare le curve, o ottenere l'espressioni delle sottangenti, delle sunnormali ecc., si dee sempre ricorrere a' limiti, o agl'infinitamente piccoli.

251. Considerando gli sviluppi delle diverse funzioni $(x+h)^m$, a^{x+h}, $\log(x+h)$, $\text{sen}(x+h)$ ecc.; che l'Algebra ci offre; come queste funzioni sono in numero molto limitato, si può facilmente riconoscere, che, ne' loro sviluppi il coefficiente della prima potenza di h non è nè nullo, nè infinito, almeno finchè x conserva il suo valore indeterminato; ciocchè per altro risulta dalla dimostrazione precedente. Infatti supponiamo che fosse $p=0$ nell'equazione

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+\text{ecc.}$$

potrebbero accadere due casi: o il valore di x, che

rinchiudesi in p, dovrebbe esser dato da un' equazione identica, o da una che tale non fosse; in quest' ultimo caso $p=o$ rappresenterebbe un' equazione di un certo grado, e questa equazione non darebbe che un numero limitato di valori di x, ciocchè sarebbe contra l' ipotesi, che suppone in x una quantità indeterminata; ma se $p=o$, cioè $f'x=o$ fosse un' equazione identica in x (*), facendo $x=x+h$, si avrebbe ancora $f'(x+h)=o$, e come h entrerebbe ovunque entra x, questa equazione, considerata per rispetto ad h, sarebbe ancora identicamente nulla, o, in altri termini, questa equazione avrebbe luogo per qualunque valore di h; lo stesso avrebbe anche luogo nel suo sviluppo, che, dietro l' equazione (139) è

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+ \text{ecc.}=o.$$

Ma allorchè un' equazione di questo genere è nulla, indipendentemente da h, bisogna che i coefficienti delle differenti potenze di h siano nulli separatamente (*nota seconda*), e che perciò si abbia

$$p'=o,\ p''=o,\ p'''=o,\ \text{ecc.}$$

Sostituendo questi valori nell' equazioni

$$p'=2q,\ p''=3r,\ p'''=4s,\ \text{ecc.},$$

che risultano dall' identità de' termini affetti dalle stesse potenze di ik, di i^2h, di i^3h, nelle serie (134) e (136), si otterrebbe

$$q=o,\ r=o,\ s=o\ \text{ecc.};$$

* Il caso nel quale p non contiene x è compreso in questo, poicchè se il valore di p, ch' è nullo, rappresentisi con $a-a$, può esprimersi con $a-x-(a-x)$.

e come inoltre $p=0$, l' equazione (133) si ridurrebbe a

$$f(x+h)=fx;$$

bisognerebbe dunque che $x+h$ sostituito ad x non cambiasse la funzione, ciocchè esige che questa funzione fosse identica, o costante; poicchè è noto che se, per esempio, fx fosse della forma x^2-x^2, o dell' altra $c+x^2-x^2$, la sostituzione di $x+h$ in vece di x, darebbe sempre lo stesso risultamento; e si vede che nel primo caso la funzione sarebbe identica, e nel secondo si ridurrebbe ad una costante c. Segue da ciocchè precede, che il coefficiente della prima potenza di h non può essere nullo nello sviluppo generale di $f(x+h)$,

Non sarebbe meno assurdo il supporre questo coefficiente infinito; poicchè il secondo membro dell'equazione (133), divenendo infinito, tale sarebbe ancora il primo, cioè si avrebbe $f(x+h)=\infty$; e come $f(a+h)$ è formato in $a+h$, come lo è fx in x, il termine che in $f(a+h)$ renderebbe infinita questa espressione, dovrebbe render parimente infinito fx. Per esempio se $f(x+h)$ racchiudesse un termine della forma $\frac{A}{(x+h)-(a+h)}$, ch' è infinito, egli è evidente, che si dovrebbe avere in fx il termine $\frac{A}{x-x}$, che sarebbe parimente infinito. Segue da ciò che la funzione proposta sarebbe infinita, ciocchè noi non supponiamo.

252. L' espressioni $f'x$, $f''x$, $f'''x$ ec. sono ciocchè Lagrange chiama *funzione prima*, *funzione seconda*, *funzione terza* ec., ed in generale ne sono le funzioni derivate. Lagrange indica le funzioni derivate anche in un altro modo, rimpiazzando $\frac{dy}{dx}$ con

y', $\frac{d^2y}{dx^2}$ con y''; $\frac{d^3y}{dx^3}$ con y''', e così in seguito.

De' casi, ne' quali la formula di Taylor è in difetto.

253. ** In generale, allorchè in una funzione di x si sostituisce $x+h$ ad x, la forma della funzione resta la stessa, poichè $x+h$ entra ovunque era prima x; perciò allorchè fx comprende un radicale, $f(x+h)$ dee anche comprenderlo: per esempio se si ha

$$fx=bx^2+\frac{a}{\sqrt{(x)}},$$

lo stesso radicale si troverà nell' espressione

$$f(x+h)=b(x+h)^2+\frac{a}{\sqrt{(x+h)}}.$$

254. Non potrebbe dirsi sempre lo stesso, se si desse ad x un valore particolare, cioè determinato; per esempio se $\sqrt[3]{(x-a)}$ entrasse in fx, bisognerebbe che $f(x+h)$ contenesse il termine

$$\sqrt[3]{(x+h-a)};$$

or l'ipotesi di $x=a$ farebbe svanire $\sqrt[3]{(x-a)}$, che si trova in fx, mentre che la stessa ipotesi ridurrebbe il termine $\sqrt[3]{(x+h-a)}$, ch' entra in $f(x+h)$ a $\sqrt[3]{(h)}=h^{\frac{1}{3}}$: dunque in tal caso lo sviluppo di $f(x+h)$ conterrebbe un radicale che non esisterebbe in fx, e che perciò non potrebbe svilupparsi secondo le potenze intere di h.

Questa impossibilità si manifesterebbe per mezzo de' valori infiniti, che prenderebbero i coefficienti differenziali: per esempio, se si avesse l'equazione

$$y=\sqrt[3]{(x-a)}\,,$$

differenziandola si troverebbe

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(x-a)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}}$$

e si vede che il valore di questo coefficiente differenziale diviene infinito, allorchè si fa $x=a$.

255. Sia in generale

$$f(a+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3\ldots$$

$$+Mh^n+Nh^{n+\frac{1}{r}}+\text{ ecc.}\ldots(142)$$

lo sviluppo che potremo supporre di essersi ottenuto facendo $x=a$, nel quale $n+\frac{1}{r}$ rappresenti una quantità che cade tra n, ed $n+1$: andremo a dimostrare che il coefficiente differenziale dell' ordine $n+1$ è infinito. A tal oggetto, riguardando a come una variabile, sappiamo (art. 53, e 54), che si ha

$$\frac{df(a+h)}{da}=\frac{df(a+h)}{dh}\,,\ \frac{d^2f(a+h)}{da^2}=$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2}\text{ ecc.}\ldots(143)$$

Differenziamo successivamente l' equazione (142) rispetto ad h, e supponiamo per brevità che M', N', M'', N'' ecc: rappresentino ciocchè divengono i coefficienti M, N nelle successive differenziazioni; avremo

$$\frac{df(a+h)}{dh}=B+2Ch+3\,Dh^2\ldots$$

$$+M'h^{n-1}+N'h^{n+\frac{1}{r}-1}+\text{ ecc.}$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2}=2C+2.3Dh\ldots$$

$$+M''h^{n-2}+N''h^{n+\frac{1}{z}-2}+\text{ecc.}$$

ec. ec. ec. ec.;

rimpiazzando i primi membri di queste ultime equazioni per mezzo da' loro valori dati dall' equazioni (143), otterremo

$$\frac{df(a+h)}{da}=B+2Ch+3\,Dh^2\ldots$$

$$+M'h^{n-1}+N'h^{n+\frac{1}{z}-1}+\text{ecc.}\ \ldots\ (144)$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{da^2}=2\,C+2.3\,Dh\ldots$$

$$+M''h^{n-2}+N''h^{n+\frac{1}{z}-2}+\text{ecc.}\ \ldots\ (145)$$

ec. ec. ec. ec.

facendo $h=0$ nell' equazioni (142), (144), e (145) ec., si avrà

$$fa=A,\ \frac{dfa}{da}=B\ ,\ \frac{d^2fa}{da^2}=2C,\ \text{ecc.}$$

Ciò basta per determinare i coefficienti A, B, C ecc. dell' equazione (142).

Ciò posto, dalla sola osservazione dell' equazione (144), e (145) apparisce, che n diminuendo di una unità in ogni differenziazione, allorchè saremo giunti alla nesima differenziazione, si avrà

$$\frac{d^nf(a+h)}{da^n}=\ldots Ph^{n-n}+Qh^{n-n+\frac{1}{z}}+\text{ec.}$$

$$=P+Qh^{\frac{1}{z}}+\text{ecc.};$$

e nella differenziazione seguente si troverà

$$\frac{d^{n+1}f(a+h)}{da^{n+1}}=Rh^{\frac{1}{z}-1}+\text{ecc.}$$

Ora $\frac{1}{z}$ essendo minore dell' unità, $\frac{1}{z}-1$ è un

numero negativo : dunque l'equazione precedente potrà scriversi così

$$\frac{d^{n+1}f(a+h)}{da^{n+1}} = \frac{R + ec.}{h^{-(1-\frac{1}{2})}} :$$

per conseguenza , allorchè si farà $h=0$ per determinare il coefficiente di uno de' termini dell' equazione (142), si troverà

$$\frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}} = \frac{R}{0} = \infty ;$$

lo stesso avverrà , allorchè si vorranno determinare i coefficienti differenziali di un ordine superiore.

Risulta da questo teorema, che *allorchè si fa* $x=a$ *nello sviluppo di* $f(x+h)$, *se in questo sviluppo vi è una potenza fratta di h , e ch' essa sia compresa tra' termini affetti da* h^n , *e da* h^{n+1}, *non si possono determinare i termini della serie di Taylor , che fino all' ordine* n *inclusivamente : tutti gli altri termini diverranno infiniti.*

256. Se è data una funzione di x, e si vuol determinare lo sviluppo di $f(x+h)$, nell' ipotesi di $x=a$, bisognerà , com' è noto , calcolare i termini della serie

$$fx + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \text{ ecc.}$$

Ma se , facendo questo calcolo , si trova che uno de' coefficienti differenziali diviene infinito nell' ipotesi di $x=a$, non si progredirà oltre nello sviluppo di $f(x+h)$ della serie di Taylor ; ecco però il metodo che bisognerà impiegare. *Si porrà* $x+h$ *in luogo di* x *nella* fx ; *allora il termine che contiene* $x-a$ *nel denominatore conterrà* $x-a+h$, *e non diverrà più infinito , allorchè si fa* $x=a$; *ma darà luogo ad un termine affetto da una potenza fratta di* h

257. Sia per esempio

$$fx=2ax-x^2+a\sqrt{(x^2-a^2)};$$

differenziando si trova

$$\frac{dy}{dx}=2(a-x)+\frac{ax}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$$

sostituendo questi valori, e quelli di $\frac{d^2y}{dx^2}$, di $\frac{d^3y}{dx^3}$ ecc. nella formola di Taylor, (art. 55), si otterrà

$$f([x+h)=2ax-x^2+a\sqrt{(x^2-a^2)}+[2(a-x)$$

$$+\frac{ax}{\sqrt{(x^2-a^2)}}]h+\text{ ecc.}$$

Or quando è $x=a$, il termine moltiplicato per h diviene infinito; dunque questo sviluppo non è più possibile.

In questo caso, secondo la regola precedente, si metterà $x+h$ in luogo di x nell'equazione

$$fx=2ax-x^2+a\sqrt{(x^2-a^2)},$$

e si troverà

$$f(x+h)=2ax+2ah-x^2-2xh-h^2$$

$$+a\sqrt{(x^2+2xh+h^2-a^2)},$$

equazione, che nell'ipotesi di $x=a$, diviene

$$f(a+h)=a^2-h^2+a\sqrt{(2ah+h^2)}$$

o

$$f(x+h)=a^2-h^2+a\sqrt{h}\sqrt{(2a+h)};$$

sviluppando colla formula del binomio, e rappresentando per brevità i coefficienti di questa formola colle lettere A, B, C ecc., si ha

$$\sqrt{(2a+h)}=(2a+h)^{\frac{1}{2}}=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ ecc.};$$

sostituendo si trova

$$f(a+h)=a^2-h^2+aA\sqrt{(h)}+aBh\sqrt{(h)}+aCh^2\sqrt{(h)}+\text{ec}$$

Si vede da questo esempio che mettendo $x+h$ nella funzione, e facendo $x=a$, possono introdursi una o più potenze fratte di h; si sviluppino in seguito separatamente i termini che sono suscettibili di esserlo, sia per mezzo della formola del binomio, sia altrimenti, e si sostituiscano questi termini nel valore di $f(a+h)$, ciocchè ne darà lo sviluppo.

258. Allorchè x resta indeterminato, Lagrange ha dimostrato, che lo sviluppo di $f(x+h)$ non poteva contenere termini affetti da una potenza fratta di h. Infatti supponiamo che si avesse

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \dots + K\sqrt{(h)};$$

come $k\sqrt{(h)}$ è suscettibile di tre valori M, N, P, si avranno questi tre sviluppi di $f(x+h)$.

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \dots + M$$
$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \dots + N$$
$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \dots + P$$

Or dovendo fx comprendere gli stessi radicali di $f(x+h)$, (art. 253), bisogna che fx abbia ancora tre valori differenti Q, R, S; sostituendo successivamente questi valori in luogo di x, si avrà

$$f(a+h)=Q+ph+qh^2 \dots + M$$
$$f(x+h)=Q+ph+qh^2 \dots + N$$
$$f(a+h)=Q+ph+qh^2 \dots + P$$
$$f(a+h)=R+ph+qh^2 \dots + M$$
$$f(a+h)=R+ph+qh^2 \dots + N$$
$$f(x+h)=R+ph+qh^2 \dots + P$$
$$f(x+h)=S+ph+qh^2 \dots + M$$
$$f(x+h)=S+ph+qh^2 \dots + N$$
$$f(x+h)=S+ph+qh^2 \dots + P$$

di maniera che l' espressione $f(x+h)$ sviluppata avrebbe nove valori differenti, mentre che non sviluppata non potrebbe averne che quelli soli che fx comporta, cioè tre nell' ipotesi attuale: perciò non può supporsi che lo sviluppo di $f(x+h)$ contenga una potenza fratta di h, senza cadere in una contradizione.

259. Egli è egualmente facile di dimostrare che $f(x+h)$ non può contenere nel suo sviluppo un termine affetto da una potenza negativa di h, poichè se contenesse un termine della forma Mh^{-n}, si avrebbe

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots + \frac{M}{h^n};$$

or facendo $h=o$, il primo membro si cambia in fx, el secondo, invece di ridursi a fx, diviene infinito, a cagione del termine $\frac{M}{h^n}$ che comprende.

260. Lo stesso avrebbe luogo, se lo sviluppo contenesse un termine affetto dal logaritmo di h; poichè se si avesse, per esempio, un termine come $A \log h$, questo, facendo $h=o$, diverrebbe $A \log o$; or il logaritmo di o essendo infinito negativo, tale sarebbe il termine $A \log h$, d' onde segue che fx dovrebbe esserlo ancora, ciocchè è contra l' ipotesi.

FINE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

TAVOLA DELLE MATERIE.

CALCOLO DIFFERENZIALE.

FINE DELLA TAVOLA.

ELEMENTI
DI CALCOLO DIFFERENZIALE
ED INTEGRALE

CACOLO INTEGRALE

Dell' integrazione de' differenziali monomii.

261. L'OGGETTO del colcolo integrale è quello di trovare la funzione, che, dopo essere stata differenziata, ha dovuto produrre un dato differenziale. Per cominciare dal caso più semplice, cerchiamo d' integrare l'espressione $x^m dx$, ch' è la formola generale de' differenziali monomii: a tal oggetto noi differenzieremo prima l' espressione x^{m+1}, e si avrà

$$dx^{m+1}=(m+1)x^m dx,$$

d'onde se ne dedurrà

$$\frac{d.x^{m+1}}{m+1}=x^m dx\,;$$

e poicchè la costante $m+x$ non influisce affatto sulla differenziazione; l' equazione precedente potrà scriversi così

$$d\frac{x^{m+1}}{m+1}=x^m dx;$$

perciò la quantità, che colla differenziazione ha data $x^m dx$ è $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. Per indicare queste operazioni, metteremo avanti il differenziale il segno caratteristico $\int$, che significa *somma* o *integrale* (*), in modo che si scriverà

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

262. Conchiudiamone questa regola generale: *per integrare* $x^m dx$, *bisogna aumentare l'esponente d' una unità, e divider tutto per questo esponente così aumentato, e pel differenziale.*

263. Sia per esempio $\frac{adx}{x^3}$; si avrà

(*) *La parola somma*, o sommatorio *adottata per designare l' integrale, è stata introdotta dagli antichi geometri, perchè, secondo il metodo degl' infinitamente piccoli, essi consideravano una funzione* y, *come una somma di accrescimenti infinitamente piccoli.*

Per esempio, si vede, che se l' ordinata è MP, (Fig. 21), si ha

Fig. 21

$$MP=ab+a'b'+a''b''+a'''b'''+a^{IV}M,$$

cioè che y *è eguale alla somma degli accrescimenti infinitamente piccoli rappresentati ciascuno da* dy.

$$\int \frac{a\mathrm{d}x}{x^3} = \int ax^{-3}dx = \frac{ax^{-3+1}}{-3+1} = \frac{ax^{-2}}{-2} = -\frac{a}{2x^2};$$

similmente si troverà, che

$$\int \mathrm{d}x\sqrt[3]{x^2} = \int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}$$

264. Abbiamo osservato che il differenziale di $a+x^m$ era $mx^{m-1}\mathrm{d}x$, come se si fosse differenziato solamente x^m: per conseguenza, integrando, bisognerà accrescere l' integrale di una costante. Perciò negli esempii precedenti scriveremo

$$\int \frac{a\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{a}{2x^2} + C; \quad \int \mathrm{d}x\sqrt[3]{x^2} = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$$

265. Questa costante C, che dee svanire per mezzo della differenziazione, è in generale arbitraria, a meno che non sia determinata dalla natura del problema.

Per esempio, se si ha $y=ax^2-b$, che è quella di una parabola (*Fig.* 23.) CBD, per rispetto all' origine A; e che se ne tiri $dy=2ax\mathrm{d}x$, si troverà, integrando

Fig. 23

$$y=ax^2+C \quad \ldots\ldots (1)$$

Questa equazione può convenire ad una infinità di parabole. Or se si vuole che tra tutte queste parabole CBD, C'B'D', C''B''D'',

la curva che ha per equazione $y=ax^2+C$, appartenga a quella che passa pel punto E, segnato dalle coordinate $y=0, x=AE=+\sqrt{\frac{b}{a}}$, sarà uopo che facendo in (1) $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, si abbia $y=0$: questa condizione riduce l' equazione (1) a

$$0=b+C$$

d' onde si deduce $C=-b$: sostituendo questo valore nell' equazione (1), si avrà

$$y=ax^2-b,$$

come si avea prima dalla differenziazione.

266. Allorchè la natura del problema non determina la costante, può disporsi di essa, come nel seguente esempio. Abbiamo ritrovato che l' integrale di $x^m dx$ è

$$y=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C \quad \ldots\ldots (2):$$

dando ad x un valor determinato b, il secondo membro di questa equazione diverrà

$$\frac{b^{m+1}}{m+1}+C \quad \ldots\ldots (3)$$

Essendo C arbitraria, noi possiamo determinare questa costante per mezzo della condizione $\frac{b^{m+1}}{m+1}+C=0$, il che vale lo stesso di

supporre che y sia zero, allorchè $x=b$: in tal caso si avrà $C=-\frac{b^{m+1}}{m+1}$, e sostituendo questo valore nell'equazione (2) si avrà

$$y=\frac{x^{m+1}-b^{m+1}}{m+1} \ldots\ldots (4)$$

267. In un caso solo non ha luogo la regola dell'articolo 262, per l'integrazione di $x^m dx$; ed è quando si ha $m=-1$; poichè allora la formola (4) diverrebbe

$$y=\frac{x^0-b^0}{0}=\frac{0}{0};$$

In questo caso bisognerebbe far uso della regola dell' art. 81, per determinare il vero valore dell'integrale; ma si può evitare questo inconveniente, osservando che $x^{-1}dx=\frac{dx}{x}$, o che l'espressione $\frac{dx}{x}$ è il differenziale di $\log x$; per conseguenza sarà

$$\int\frac{dx}{x}=\log x+C.$$

De' differenziali complessi, la cui integrazione può farsi per mezzo della regola dell' articolo 262.

268. Abbiamo veduto, art. 28, che il differenziale di un polimonio si ottenea, prendendo la somma de' differenziali de' suoi termini; reciprocamente l' integrale di un polinomio sarà eguale alla somma degl' integrali de' termini che la compongono.

Per esempio

$$\int\left(adx-\frac{bdx}{x^3}+xdx\sqrt{x}\right)=\int adx-\int\frac{bdx}{x^3}$$

$$+\int x^{\frac{3}{2}}dx+C=$$

$$\int adx-\int bx^{-3}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx+C$$

e, facendo le integrazioni

$$\int\left(adx-\frac{bdx}{x^3}+xdx\sqrt{x}\right)=$$

$$ax+bx^{-2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=ax+\frac{b}{x^2}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C.$$

Non vi abbiamo aggiunto, che una sola costante, perchè, l' integrazione di ogni termine dando una costante particolare, possiamo rappresentare con C la somma di queste costanti.

269. Ogni polinomio, come

$$(a+bx+cx^2+ec.)^n dx$$

può integrarsi per mezzo della stessa regola, allorchè n è un numero intero positivo. A tal oggetto, basta di elevare il polinomio alla potenza indicata, e d'integrare separatamente ogni termine.

Per esempio, per integrare $(a+bx)^2 dx$, avremo

$$\int(a+bx)^2 dx = \int(a^2 dx + 2abx dx + b^2 x^2 dx)$$

$$= a^2 x + abx^2 + \frac{b^2 x^3}{3} + C.$$

270. Quando si ha una espressione della forma $(Fx)^n dFx$, composta di due fattori, una de' quali è il differenziale della parte Fx, ch'è tra le parantesi; per integrare questa funzione si farà $Fx=z$; e perciò sarà $dFx=dz$; sostituendo, si avrà

$$(Fx)^n dFx = z^n dz$$

ed integrando, si avrà

$$\int(Fx)^n dFx = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(Fx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Per darne un'esempio, sia

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{2}{3}}(bdx+2cxdx)$$

come $bdx+2cxdx$ è il differenziale della quantità racchiusa tra le parentesi, si farà

$$a+bx+cx^2=z,$$

e si avrà differenziando

$$b\mathrm{d}x+2cx\mathrm{d}x=\mathrm{d}z;$$

sicchè sarà

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{2}{3}}(b\mathrm{d}x+2cx\mathrm{d}x=z^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}z.$$

L' integrale di questa espressione sarà

$$\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}+\mathrm{C}=\frac{3}{5}(a+bx+cx^2)^{\frac{5}{3}}+\mathrm{C}.$$

271. Se uno de' fattori fosse il differenziale dell' altro, a meno di una costante, si potrebbe ancora integrare l' espressione collo stesso metodo. Sia, per esempio

$$(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}mx\mathrm{d}x \;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

Come il differenziale di $a+bx^2$, ch' è $2bx\mathrm{d}x$, non differisce da $mx\mathrm{d}x$, che per la costante, si farà $a+bx^2=z$, e per conseguenza $2bx\mathrm{d}x$ $=\mathrm{d}z$, da cui si ha $x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{2b}$; sostituendo questi valori nell' equazione (5), si otterrà

$$(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}mx\mathrm{d}x=\frac{m}{2b}z^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z;$$

ed integrando verrà

$$\int(a+bx^2)mx\mathrm{d}x=\frac{m}{2b}\int z^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z=\frac{m}{3b}z^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}$$

$$=\frac{m}{3b}(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}.$$

272. La stessa trasformazione può applicarsi ancora per rapportare alcuni integrali a de'

logaritmi: se si avesse, per esempio, $\frac{adx}{a+bx}$, facendo $a+bx=z$, se ne dedurrebbe $dx=\frac{dz}{b}$; sostituendo, si ha

$$\int\frac{adx}{a+bx}=\int\frac{adz}{bz}=\frac{a}{b}\int\frac{dz}{z}=\frac{a}{b}\log z+C;$$

e mettendo per z il suo valore,

$$\int\frac{adx}{a+bx}=\frac{a}{b}\log(a+bx)+C:$$

Operando nello stesso modo per $\frac{adx}{a-bx}$, si vedrà che l'integrale di questa espressione

$$\int\frac{adx}{a-bx}=-\frac{a}{b}\log(a-bx)+C.$$

De' differenziali, che s'integrano per mezzo degli archi di cerchio.

273. Sia (Fig. 21) $x=ba$ il seno dell'arco $bB=z$; avremo $x=\operatorname{sen}z$; differenziando si avrà $dx=dz\cos z$; da cui si ottiene $dz=\frac{dx}{\cos z}$: d'altronde l'equazione $\cos^2 z+\operatorname{sen}^2 z=1$ ci da Fig. 21

$$\cos z=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}=\sqrt{1-x^2}:$$

sostituendo questo valore in quello di dz, si avrà $dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; per conseguenza integran-

do, si troverà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = z + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Per determinare la costante, supponiamo che la condizione di $x=0$ abbia luogo coll'altra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 ;$$

Poichè l' arco z rappresentato da bB è nullo quando il seno è zero. l' equazione (6) si ridurrà in questa ipotesi, a $0=C$; per conseguenza sarà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\text{sen} = x).$$

275. Dall' integrale precedente si può far dipendere quello di

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} ;$$

infatti dividendo per a i due termini della frazione, si avrà

$$\int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d.\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} ;$$

questo integrale essendo fermato rignardo ad $\frac{x}{a}$, come lo è $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ riguardo ad x, ne

risulta

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d.\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = arc\left(sen=\frac{x}{a}\right)$$

275. In secondo luogo sia z l'arco bB, il cui coseno è $Pa=x$; avremo

$$x=\cos z;$$

e differenziando, sarà

$$dx=-dz\,sen z,$$

da cui si ha

$$dz=-\frac{dx}{sen z};$$

e mettendo per senz il suo valore $\sqrt{1-\cos^2 z}$ tirato dall' equazione

$$\cos^2 z+sen^2 z=1,$$

si avrà

$$dz=-\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 z}};$$

o per essere $\cos z=x$

$$dz=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

sicchè integrando si avrà

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=z=arc(\cos=x)+C=arc.bB+C. (7)$$

Fig. 21 Per determinare la costante, supponiamo che $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sia nullo, quando è $x=0$; dietro tale supposizione l' espressione (7) si ridurrà a

$$0=\text{arc.}(\cos=0)+C. \quad . \quad . \quad (8)$$

Or affinchè il cos. Pa dell' arco bB sia nullo, bisogna che quest' arco divenga

$$BM=\frac{1}{4}\text{circ.}=\frac{1}{2}\pi;$$

sicchè, mettendo $\frac{1}{2}\pi$ in luogo di arc.(cos=0) nell' equazione (8), si ha

$$0=\frac{1}{2}\pi+C,$$

da cui si ha

$$C=-\frac{1}{2}\pi;$$

sostituendo questo valore nell' equazione (7), si ottiene

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc.}bB-\frac{1}{2}\pi$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\pi-\text{arc.}bB\right)$$

$$=-(\text{arc.BM}-\text{arc.B}b)=-\text{arc.}b\text{M}.$$

276. Abbiamo veduto art. 45 che

$$\text{dtang}x=\frac{dx}{\cos^2 x};$$

se facciamo $x=\text{tang}z$, avremo

$$dx=\text{dtang}z=\frac{dz}{\cos^2 z};$$

da cui si ottiene

$$dz=dx\cos^2 z \quad \ldots\ldots (m)$$

ma l'equazione $\text{seg}z=\frac{1}{\cos z}$ da $\cos z=\frac{1}{\text{seg}z}$, e perciò

$\cos^2 z=\frac{1}{\text{seg}^2 z}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 z}}=\frac{1}{1+x^2}$; sicchè sostituendo questo valore in (m), si avrà

$$dz=dx\cdot\frac{1}{1+x^2}:$$

e perciò integrando sarà

$$\int\frac{1}{1+x^2}=z+C,$$

prendendo l'integrale nell' ipotesi ch' esso svanisce, allorchè $x=0$, z diviene anche nullo, e si avrà

$$0=C,$$

dunque sarà

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc.}(\text{tang}=x);$$

277. A questa formula si può rapportare quest' altra

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}:$$

infatti dividendo per a^2 i due termini della frazione, essa potrà scriversi così

$$\int\frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}:$$

e come questo integrale è formato riguardo ad $\frac{x}{a}$, come $\frac{1}{a}\int\frac{dx}{1+x^2}$ lo è riguardo ad x, si avrà

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d.\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)$$

Fig. 21 Sia $x=Ba=\text{sen.vers.}Bb$: La somma del coseno e del seno verso di un arco essendo 1, si avrà

$$x+\cos z=1\text{, cioè } x=1-\cos z \;\ldots\ldots\; (n)$$

e differenziando, si avrà

$$dx=dz\,\text{sen}z\,,$$

da cui si ha

$$dz=\frac{dx}{\text{sen}z}\;\ldots\ldots\;(r)$$

or si ha

$$\text{sen}z=\sqrt{1-\cos^2 z}=\sqrt{(1-\cos z)(1+\cos z)}\ldots(p)$$

ciò posto dall' equazione $x+\cos z=1$, si ha $1-x=\cos z$, e perciò $2-2x=2\cos z$; sommando questa equazione membro a membro coll' altra (n), sarà $2-x=1+\cos z$: sostituendo in (p) i valori di $1-\cos z$, e di $1+\cos z$, sarà

$$\text{sen}z=\sqrt{x(2-x)};$$

sostituendo questo valore di sen$z$ in (r), sarà

$$dz=\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}};$$

e perciò integrando sarà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=z=\text{arc.}(\textit{seno verso}=x).$$

Noi non vi aggiungiamo costante, perchè supponendo che l' integrale svanisca, quando x è nullo, z è ancora nullo.

278. Allorchè si vuol avere il valore dell' integrale corrispondente ad un determinato valore di x, si opera come nel seguente esempio.

Supponiamo che si domanda l' integrale di $\frac{dx}{1+x^2}$, allorchè $x=7$; in tal caso il raggio essendo 1, la tangente sarà 7; e come le tavole de' seni sono, costruite col raggio 10^{10}, la tangente relativamente a questo raggio sarà 10^{10} volte maggiore; e perciò questa tangente sarà 7.10^{10};

(imperciocchè essendo le linee trigonometriche di uno stesso arco proporzionali a' differenti raggi co' quali tali archi sono descritti, sarà $1 : 10^{10} = 7 : 7.10^{10}$; sicchè la tangente 7 rispetto al raggio 1, diviene 7.10^{10} rispetto al raggio 10^{10}).

Il logaritmo della tangente tabulare avrà dunque per espressione

$$10 + \log 7 = 10 + 0,845098 = 10,845098.$$

Cercando questo logaritmo nelle tavole de' seni, si vedrà ch'esso corrisponde ad un arco di

$$90°,96', \textit{ divisione decimale},$$

o di

$$81° 52', \textit{ divisione sessagesimale}.$$

Per trovare il valore numerico di questo arco, nell'ipotesi del raggio 1, rimarcheremo, che la circonferenza è eguale a 6, 283; per conseguenza avremo

$$400° : 90° 96' = 6,283 : \text{arco cercato} = 1,42,$$

$$360° : 81°,52' = 6,283 : \text{arco cercato} = 1,42.$$

Dell' integrazione per parti.

279. Prendendo il differenziale di un prodotto di due variabili, secondo il metodo indicato nell' art. 14, si trova

$$duv = uv - \int vdu :$$

A questa formola si rapportano i differenziali, che si debbono integrare per parti.

280. Per esempio, se s' ignorasse l' integrale di $x^m dx$, si farebbe $x^m = u$, $dx = dv$, e si avrebbe

$$\int x^m dx = x^{m+1} - \int x . m x^{m-1} dx = x^{m+1} - m \int x^m dx;$$

riunendo i fattori di $\int x^m dx$, sarà

$$(m+1) \int x^m dx = x^{m+1};$$

e perciò sarà

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

281. Sia ancora $\int dx \log x$; si farà

$$\log x = u, \quad dx = dv:$$

e si avrà

$$\int dx \log x = x \log x - \int x . \frac{dx}{x} = x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x + C = (\log x - 1) x + C.$$

282. Per ultimo esempio, cerchiamo d' integrare

$$dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

facendo

$$\sqrt{a^2 - x^2} = u, \text{ e } dx = du,$$

si troverà primieramente

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ldots (9);$$

Andiamo a trovare un altro valore di

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}:$$

a tal oggetto, si moltiplicherà questa ultima espressione per

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=1;$$

si avrà l'equazione identica

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

e facendo la prima delle integrazioni indicate nel secondo membro, si otterrà

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=a^2\text{arc.}\left(\text{sen}=\frac{x}{a}\right)-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

sommando questa equazione coll'altra (9), si troverà

$$2\int dx\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\text{arc.}\left(\text{sen}=\frac{x}{a}\right);$$

quindi sarà

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\frac{1}{2}a^2\text{arc.}\left(\text{sen}=\frac{x}{a}\right)+C.$$

Si vede da questi esempii, che allorchè si ha un'espressione della forma $\int vdu$, l'integrazione per parti fa dipendere questo inte-

grale da quello di $\int u dv$, e che, per conseguenza questo metodo d' integrazione non è applicabile a tutt'i casi.

Dell' integrazione per serie.

283. Sia Xdx un differenziale nel quale X rappresenta una funzione di x; se X si svilupperà in una serie

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon + \text{ec.}$$

ordinata per rapporto agli esponenti α, β, γ ec.,(*) si avrà

$$\int Xdx = \int (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon + \text{ec.})dx$$

$$= \frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{Bx^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{Cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \frac{Dx^{\delta+1}}{\delta+1} + \frac{Ex^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1}$$

$$+ \text{ec.} + C.$$

284. Prendiamo per esempio $\frac{dx}{a+x}$, ch' è il differenziale di $\log(a+x)$: questa frazione si scriverà così

$\frac{1}{a+x} \cdot dx$: ciò posto si troverà primieramente lo

---

(*) *Se uno degli esponenti α, β, γ ec. fosse -1, il termine, che ne sarebbe affetto, s'integrerebbe per mezzo de' logaritmi.*

sviluppo di $\frac{1}{a+x}$, ciocchè si otterrà per mezzo della divisione; ma senza fare questa operazione, lo sviluppo richiesto può dedursi da una formola facile a tenersi a memoria; e questa è

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\text{ec.} \quad \ldots\ldots \quad (10)^*$$

Infatti la frazione $\frac{1}{a+x}$ può scriversi nel seguente modo

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)};$$

allora, per ottenere lo sviluppo di $\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$, basterà cambiare z in $-\frac{x}{a}$ nella formola (10),

(*) *Questa formola essendo stata trovata per mezzo della divisione, potrebbe credersi, che sarebbe meglio dividere da principio* 1 *per* $a+x$; *ma bisogna osservare che quando la formola proposta è impressa nella memoria, è meno lungo dedurne diversi sviluppi, che di ricominciare il calcolo in ogni volta.*

e si avrà

$$\frac{1}{1+\frac{x}{a}}=1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\text{ec.}:$$

dunque sarà

$$\frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{ec.};$$

e perciò

$$\int\frac{dx}{a+x}=\int\left(\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{ec.}\right)dx;$$

ed integrando ogni termine in particolare, si otterrà

$$\int\frac{dx}{a+x}=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{ec.}+C \quad . \; . \; . \; (11),$$

ed osservando, che il primo membro di quest' equazione è un differenziale logaritmo (art. 277), si avrà

$$\log(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{ec.}+C. \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

Per determinare la costante, rimarcheremo che allorchè è $x=0$, questa equazione riducesi a $\log a=0+C$; sostituendo questo valore di C, l' equazione (12) diverrà

$$\log(a+x)=\log a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{ec.}\ (*)$$

(*) *Osservisi che determinando così la costante, essa non viene più riguardata come arbitraria; poicchè facendo* $x=0$ *nell' equazione* (12), *la costante è necessariamente eguale al logaritmo di* a. *Questa costante ha preso un valore determinato, allorchè abbiamo sostituito* $\log(a+x)$ *a* $\int\frac{dx}{a+x}$: *infatti l' equazione* (11) *ci mostra che* $\frac{dx}{a+x}$ *è in generale il differenziale di* $C+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+ec.$; *or la serie* $\log a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+ec.$, *ch' è lo sviluppo di* $\log(a+x)$, *è un caso particolare della serie precedente; ed è quello, in cui è* $C=\log a$. *Perciò quando in luogo di* $\int\frac{dx}{a+x}$ *si è messo* $\log(a+x)$ *è come, se tra tutte le serie, che sono l' integrale di* $\frac{dx}{a+x}$, *si fosse prescelta*

285. Per secondo esempio, cerchiamo d'integrare per mezzo delle serie l'espressione $\frac{dx}{1+x^2}$; scrivendo questo differenziale così $\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$, si tratta di trovare lo sviluppo di $\frac{1}{1+x^2}$. A tale oggetto paragonando questa espressione ad $\frac{1}{1-z^2}$, sarà $z=-x^2$; e sostituendo questo valore nell'equazione (10), si avrà

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\text{ec.} \ldots (13);$$

dunque sarà

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\int(1-x^2+x^4-x^6+\text{ec.})dx$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\text{ec.}+C;$$

cioè (art. 276)

---

quella, nella quale la costante è loga.

Questa osservazione può applicarsi alle altre espressioni, che anderemo ad integrare per mezzo delle serie.

$$\text{arc}(\text{tang}=x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\text{ec.}+\text{C}\ldots(14)$$

Quando è $x=0$, l'arco divenendo nullo, anche l'equazione (14) diverrà $0=0+\text{C}$; perciò non vi sarà costante da aggiungere alla serie (14).

286. Se la tangente è maggiore di 1, i termini di questa serie, andando crescendo, non si potrà avere un valore dell'arco prossimo al vero; in questo caso, per avere una serie convergente, si farà $x=\frac{1}{x}$ nell'equazione (13), ciocchè la cambierà in

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\text{ec.};$$

moltiplicando i due termini del primo membro per x^2, sarà

$$\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\text{ec.};$$

dividendo per x^2, si avrà

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}+\text{ec.}(*);$$

sicchè sarà

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}+\text{ec.}\right)dx+\text{C};$$

(*) *Si arriverebbe alla stessa serie direttamente, dividendo* 1 *per* x^2+1.

e facendo l' integrazione indicata, sarà

$$\text{arc}(\text{tang}=x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}+C. \quad \ldots(15)$$

Per trovare il valore della costante, non faremo $x=0$, perchè allora i termini del secondo membro dall' equazione (15) diverrebbero infiniti; ma facendo $x=\infty$, l' espressione arc(tang$=x$) sarà eguale al quarto della circonferenza, e l' equazione (15) diverrà $\frac{1}{4}$ *circonf*$=0+C$; e rappresentando con $\frac{1}{2}\pi$ il quarto della circonferenza, l' equazione (15) ci darà

$$\text{arc}(\text{tang}=x)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}$$

287. Per integrare per mezzo delle serie

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

si svilupperà $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ per mezzo della formola del binomio nel modo seguente: si calcoleranno primieramente i coefficienti dello sviluppo di $(1-x^2)^m$, nell' ipotesi di $m=-\frac{1}{2}$, scrivendo per formare questi coefficienti

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}+\text{ec.}$$

e cambiando in m in $-\frac{1}{2}$, quest' espressioni di-

verranno

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \text{ ec.}$$

Moltiplicando successivamente $-\frac{1}{2}$, per $-\frac{3}{4}$, per $-\frac{5}{6}$ ec., si formeranno i coefficienti, che si metteranno in luogo di A, di B, di C, ec. in questa equazione

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-Ax^2+Bx^4-Cx^6+\text{ec.};$$

ciocchè darà

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\text{ec.};$$

ed integrando, si avrà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\text{ec.}\right)dx,$$

cioè

$$\text{arc}(\text{sen}=x)=$$

$$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{ec.} \;\ldots\; (16):$$

non vi aggiungiamo costante, perchè, allorchè $x=0$, l' arco, il cui seno è x, svanisce.

** 288. Vi sono de' casi, ne' quali, per determinare il valore della costante, non si può fare nè $x=0$, nè $x=\infty$.

Sia, per esempio,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx=(x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{dx}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

ponendo

$$m,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3}\ \text{ec.},$$

e facendo

$$m=-\frac{1}{2},$$

si trova

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{5}{6}\ \text{ec.},$$

d' onde si conchiude, come nell' art. 287.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{dx}{x}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^6}+\text{ec.}\right);$$

ed integrando, sarà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6x^6}-\text{ecc.},$$

d' altronde si ha

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\int\frac{\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}+dx}{x+\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{d(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2-1});$$

sicchè sarà

$$\log(x+\sqrt{x^2-1})=$$

$$\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^6}-\text{ecc.}\ldots(17)$$

Per determinare la costante, non potrà farsi $x=\infty$, perchè allora $\log x$ diverrebbe infinito; neppure si potrà fare $x=0$, perchè i termini $\log x$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}$ ecc. diverrebbero infiniti; ma se si suppone $x=1$, l' equazione (17) diverrà

$$0=0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\text{ecc.}+C,$$

ciocche da

$$C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\text{ecc.}^{**}$$

289. La formola (16) può servire a trovare un valore della circonferenza prossima al

vero; poiche facendo $x=\frac{1}{2}$, essa riducesi a

$$\text{arc}(\text{sen}=\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\frac{1}{2^7}+\text{ecc}:$$

ora il seno il cui valore è $\frac{1}{2}$, essendo eguale alla metà del lato dell'esagono regolare, come questo seno corrisponde alla duodecima parte della circonferenza, perciò avremo.

$$\frac{\text{circonf}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\text{ecc.};$$

e perciò sarà.

$$\text{circonf}=12\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\text{ecc.}\right):$$

se si prendono i dieci primi termini della serie precedente, si avrà

$$0,52359877:$$

dunque sarà

$$\frac{1}{2}\text{circonf}=6(0,52359877)=3,14159262,$$

valore, nel quale l'errore non si porta che sull' ultima cifra decimale.

290. Abbiamo trovato, (art. 294),

$$\log(a+x)=\log a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{ecc.};$$

Questa serie essendo poca convergente, facciamo $x=-x$, si avrà

$$\log(a-x)=\log a-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-\text{ecc.}$$

Togliendo questa dall' equazione precedente, si avrà

$$\log(a+x)-\log(a-x)=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\text{ecc.}\right);$$

o

$$\log\frac{a+x}{a-x}=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\right)\ldots(18)$$

291. Per determinare, per esempio il logaritmo di 2, per mezzo di questa formola si supporrà

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{2}{1};$$

e perciò

$$a+x=2,\ a-x=1;$$

sicche sarà

$$a=\frac{3}{2},x=\frac{1}{2},\frac{x}{a}=\frac{1}{3},\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{9}\text{ecc.};$$

sostituendo si avrà

$$\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{243}+\text{ecc.}\right)$$

Limitandoci a' dieci primi termini di questa serie ridotta in decimali, si determinerà il valore del logaritmo di 2; triplicando questo logaritmo, si avrà quello di 2^3, o di 8. D'altronde se per mezzo della stessa formola (18) si calcoli il logaritmo di $\frac{10}{8}$, e questo logaritmo si unisca a quello di 8, si avrà il logaritmo di $\frac{10}{8} \cdot 8 = \log 10$ Si vede subito che, seguitando sempre nello stesso modo, la formola (18) darebbe il logaritmo di ogni altro numero; bisogna però osservare che questi logaritmi sono Neperiani. Per dedurne i logaritmi tabulari, se rappresentiamo con La il logaritmo tabulare di un numero a, avremo $a = 10^{La}$; prendendo i logaritmi neperiani, questa equazione ci darà

$$\log a = \log 10^{La} = La \log 10 \text{ ,}$$

e perciò

$$La = \frac{\log a}{\log 10};$$

cioè il logaritmo tabulare di un numero è eguale al logaritmo Neperiano di questo stesso numero diviso pel logaritmo Neperiano di 10.

** 292. Si è trovata una serie anche più convergente di quella, che ci da la formola (18), per determinare un logaritmo. Ecco in qual modo essa può dedursi da questa formula. Dividendo $a+x$ per $a-x$, si trova

$$\frac{a+x}{a-x}=1+\frac{2x}{a-x};$$

rappresentiamo la frazione $\frac{2x}{a-x}$ per mezzo di $\frac{v}{z}$, si avrà l' equazione

$$\frac{a+x}{a-x}=1+\frac{v}{z}=\frac{z+v}{z};$$

e moltiplicando per $a-x$, ne verrà

$$a+x=a-x+\frac{av}{z}-\frac{vx}{z};$$

portando tutte le x al primo membro, si avrà

$$2x+\frac{vx}{z}=\frac{av}{z};$$

moltiplicando per z, si trova

$$2xz+vx=av;$$

e perciò

$$\frac{x}{a}=\frac{v}{2z+v};$$

sostituendo nella formola (18) i valori di $\frac{a+x}{a-x}$, e di $\frac{x}{a}$, si avrà

$$\log\frac{z+v}{z}=2\left(\frac{v}{2z+v}+\frac{v^3}{3(2z+v)^3}+\frac{v^5}{5(2z+v)^5}+\text{ec.}\right);$$

ed infine

$$\log(z+v)=$$

$$=\log z+2\left(\frac{v}{2z+v}+\frac{v^3}{3(2z+v)^3}+\frac{v^5}{5(2z+v)^5}+\text{ec.}\right);$$

e finalmente

$$\log(z+v) =$$

$$\log z + 2\left(\frac{v}{2z+v} + \frac{v^3}{3(2z+v)^3} + \frac{v^5}{5(2z+v)^5} + \text{ec.}\right).$$

Per esempio, per avere il logaritmo di 2, si farà $v=1$, $z=1$, e perciò $\log z=0$: sostituendo questi valori nella formola precedente, si otterrà

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \text{ec.}\right).$$

Bisogna dividere questo logaritmo pel logaritmo Neperiano di 10, (art. 291), per avere il logaritmo tabulare di 2. **

Del metodo delle frazioni razionali.

293. Proponiamoci d'integrare l'espressione

$$\frac{Px^m + Qx^{m-1} \;\ldots\; + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} \;\ldots\; + R'x + S'}dx,$$

nella quale il moltiplicatore di dx è una frazione razionale: egli è chiaro, che nella espressione data può sempre supporsi che n sorpassi m; poicchè se ciò non avesse luogo, l'integrazione potrebbe esser ridotta a quella di un differenziale della stessa forma, nel quale la potenza più elevata di x nel denominatore sorpassasse la potenza più alta di x nel numeratore: Per ciò ottenere, basterebbe di fare la divisione, come nell'esempio seguente. Sia

$$\frac{Px^3+Qx^2+Rx+S}{Q'x^2+R'x+S'};$$

dividendo prima di tutto i termini di questa frazione per Q', si avrà

$$\frac{\frac{P}{Q'}x^3+\frac{Q}{Q'}x^2+\frac{R}{Q'}x+\frac{S}{Q'}}{x^2+\frac{R'}{Q'}x+\frac{S'}{Q'}}$$

Facciamo

$$\frac{P}{Q'}=P'';\frac{Q}{Q'}=Q'';\frac{R}{R'}=R'';\ \frac{S}{Q'}=S'';\frac{R'}{Q'}=R''';\ \frac{S'}{Q'}=S'''.$$

avremo

$$\frac{P''x^3+Q''x^2+R''x+S''}{x^2+R'''x+S'''}:$$

Si farà indi la divisione nella seguente maniera

$$\begin{array}{l|l} P''x^3+Q''x^2+R''x+S'' & x^2+R'''x+S''' \\ -P''x^3-R'''P''x^2-P''S'''x & P''x+M \end{array}$$

1.° *residuo*$(Q''-R'''P'')x^2+(R''-P''S''')x+S''':$

Rappresentiamo con M ed N i coefficienti di x^2, e di x;

il primo residuo diverrà Mx^2+Nx+S''

prosieguo della divisione $-Mx^2-MR'''x-MS'''$

secondo residuo $(N-MR''')x+S''-MS'''$

quest'ultimo può rappresentarsi con $Kx+L$, ed allora si ha

$$\frac{Px^3+Qx^2+Rx+S}{Q'x^2+R'x+S'}dx$$

$$=(P''x+M)dx+\frac{(Kx+L)dx}{x^2+R'''x+S'''}:$$

ed integrando si ha

$$\int\frac{Px^3+Qx^2+Rx+S}{Q'x^2+R'x+S'}dx$$

$$=\frac{P''x^2}{2}+Mx+\int\frac{(Kx+L)dx}{x^2+R'''x+S'''}+C;$$

in tal modo la quistione riducesi ad integrare

$$\frac{(Kx+L)dx}{x^2+R'''x+S'''}.$$

294. Da ciocchè precede risulta che, qualunque sia la frazione razionale, che si prende ad esame, la sua integrazione può essere sempre ridotta, nel caso più generale, a quella di

$$\frac{Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ \ldots\ldots\ +Rx+S'}{P'x^n+Q'x^{n-1}\ \ldots\ldots\ +R'x+S'}dx.$$

Riguardando il denominatore di questa frazione, come il prodotto di un numero n di fattori della forma $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ ec., questi fattori potranno essere reali, o imaginarii, eguali, o diseguali.

Per cominciare dal caso più semplice, li supporremo reali e diseguali, ed allora si userà il seguente metodo, che svilupperemo con degli esempii.

295. Primieramente cerchiamo d'integrare

$\frac{adx}{x^2-a^2}$: decomponendo il denominatore ne' suoi fattori, si scriverà

$$\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{adx}{(x-a)(x+a)},$$

e si supporrà

$$\frac{adx}{(x-a)(x+a)}=\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\right)dx \quad . . (19):$$

A e B sono due costanti, che si tratta di determinare. A tal oggetto, riducendo il secondo membro allo stesso denominatore, si otterrà

$$\frac{adx}{(x-a)(x+a)}=\frac{(Ax+Aa+Bx-Ba)dx}{(x-a)(x+a)};$$

sopprimendo il divisore comune $(x-a)(x+a)$, el comun fattore dx, resterà

$$a=Ax+Aa+Bx-Ba \quad . . . (20),$$

ed ordinando per rapporto ad x, si avrà

$$(A+B)x+(A-B-1)a=0:$$

avendo x un valore determinato, come (*) il differenziale proposto lo suppone, questa equazione ha luogo, qualunque sia il valore di x; laonde, a norma del metodo de' coef-

(*) *Infatti la caratteristica* d, *che precede* x, *indica che* x *si considera come variabile.*

ficienti indeterminati, si eguaglieranno separatamente a zero i coefficienti delle differenti potenze di x; o, che val lo stesso, si eguaglieranno tra loro i termini, che nell' equazione (20) contengono la stessa potenza di x, e si avrà

$$A+B=0,\ A-B-1=0:$$

quest' equazioni danno

$$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}:$$

sostituendo questi valori nell' equazione (19), si avrà

$$\int\frac{adx}{x^2-a^2}=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x-a}-\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x+a};$$

ed integrando i termini del secondo membro, si troverà

$$\int\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\log(x-a)-\frac{1}{2}\log(x+a)+C,$$

e perciò

$$\int\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\log\frac{x-a}{x+a}+C=\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Per secondo esempio, prendiamo la frazione $\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}dx$: i fattori del denominatore sono x, ed a^2-x^2, e come a^2-x^2 si decompone in $(a-x)(a+x)$, i fattori semplici del denominatore sono x, $a-x$, ed $a+x$; dunque l' espressione che dee integrarsi è

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)}dx\ ;$$

Quindi si farà

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{a+x}\quad\ldots\ (21)\ ;$$

riducendo queste frazioni allo stesso denominatore, ne verrà

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)}=\frac{Aa^2-Ax^2+Bax+Bx^2+Cax-Cx^2}{x(a-x)(a+x)}$$

eguagliando tra loro i coefficienti delle stesse potenze di x, si avrà

$$B-A-C=b\ ,\ Ba+Ca=0\ ,\ Aa^2=a^3.$$

L' ultima di queste equazioni ci da $A=a$, ciocchè riduce la prima a $B-C=a+b$: questa equazione combinata colla seconda, da

$$B=\frac{a+b}{2}\ ,\ C=-\frac{a+b}{2}\ ;$$

mettendo i valori di A, di B, e di C nell'equazione (21), si trova

$$\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}dx=\frac{adx}{x}+\frac{a+b}{2(a-x)}dx-\frac{a+b}{2(a+x)}dx\ ;$$

Sicchè integrando, sarà

$$\int\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}dx=a\log x-\frac{(a+b)}{2}\log(a-x)^*$$

(*) *Per prendere l'integrale di* $\frac{a+b}{2(a-x)}dx$,

$$-\frac{(a+b}{2}\log(a+x)+C=$$

$$=a\log x-\frac{(a+b)}{2}[\log(a-x)+\log(a+x)]+C=$$

$$=a\log x-\frac{(a+b)}{2}\log(a-x)(a+x)+C=$$

$$=a\log x-\frac{(a+b)}{2}\log(a^2-x^2)+C=$$

$$a\log x-(a+b).\frac{1}{2}\log(a^2-x^2)+C=$$

$$=a\log x-(a+b)\log\sqrt{a^2-x^2}+C$$

296. Per terzo esempio, sia $\frac{3x-5}{x^2-6x+8}dx$

Come in primo luogo si tratta di decomporre il denominatore in fattori di primo grado, osserveremo, che se si ha un' equazione x^2-6x+8, la quale sia soddisfatta da'

---

come il differenziale di a—x è —dx, *bisogna scrivere*

$$\frac{-(a+b)}{2}\cdot-\frac{dx}{a-x};$$

e si vede che l' integrale è

$$-\frac{(a+b)}{2}\log(a-x)+C.$$

valori $x=2$, e $x=4$, si potrà conchiudere ch' essa equivale al prodotto $(x-2)(x-4)=0$. Or facendo la moltiplicazione, si vede che qualunque valore diasi ad x, il prodotto sarà sempre x^2-6x+8; sicchè sarà

$$(x-2)(x-4)=x^2-6x+8:$$

Perciò qualunque sia il valore del polinomio x^2-6x+8, esso può decomporsi in fattori, come se fosse eguale a zero.

Sapendo dunque, che le radici dell' equazione $x^2-6x+8=0$ sono 2, e 4, noi scriveremo

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8}dx=\frac{Adx}{x-2}+\frac{Bdx}{x-4} \quad \ldots\ldots (22);$$

e sopprimendo il frattore comune dx, ciocchè faremo sempre in avvenire, si troverà, dopo di aver ridotto allo stesso denominatore,

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{x^2-6x+8};$$

eguagliando tra loro i coefficienti delle stesse potenze di x, si otterranno queste equazioni di condizione

$$-5=-4A-2B,\ 3=A+B,$$

dalle quali se ne tira

$$B=\frac{7}{2}, A=-\frac{1}{2}$$

mettendo questi valori nell' equazione (22), si troverà

$$\int\frac{3x-5}{x^2-6x+8}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-4}+C$$

$$=\frac{7}{2}\log(x-4)-\frac{1}{2}\log(x-2)+C$$

297. Prendiamo ancora per esempio $\frac{xdx}{x^2+4ax-b^2}$: eguagliando a zero il denominatore, e risolvendo l'equazione, si ha

$$x^2+4ax-b^2$$

$$=(x+2a+\sqrt{4a^2+b^2})(x+2a-\sqrt{4a^2+b^2}):$$

Per rendere le cose più semplici, rappresentiamo quest' ultimo prodotto con

$$(x+K)(x+L):$$

allora supporremo

$$\frac{x}{x^2+4ax-b^2}=\frac{A}{x+K}+\frac{B}{x+L};$$

riducendo il secondo membro allo stesso denominatore, troveremo

$$\frac{x}{x^2+4ax-b^2}=\frac{Ax+AL+Bx+BK}{x^2+4ax-b^2},$$

d'onde si tira

$$AL+BK=0, \quad A+B=1;$$

sicchè sarà

$$A=\frac{K}{K-L}, \quad B=-\frac{L}{K-L};$$

e perciò

$$\int\frac{xdx}{x^2+4ax-b^2}=\frac{K}{K-L}\log(x+K)$$

$$-\frac{L}{K-L}\log(x+L)+C$$

298 In generale sia

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}...+Rx+S}{x^m+Q'x^{m-1}...+R'x+S'}dx,$$

un fratto razionale, nel quale siensi supposti ineguali i fattori di primo grado del denominatore: primieramente si scioglierà l' equazione

$$x^m+Q'x^{m-1}...+R'x+S'=0;$$

ed avendo trovato ch' essa è il prodotto de' fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$, ecc., si porrà

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}...+Rx+S}{x^m+Q'x^{m-1}...+R'x+S'}$$

$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x+c}+\text{ecc.};$$

Riducendo allo stessso denominatore il secondo membro di questa equazione, ogni termine del numeratore di una di queste frazioni dovrà essere moltiplicato pel prodotto dei denominatori degli altri, cioè per un polinonio, in cui x ha per esponente $m-1$; sicchè il secondo membro di questa equazione sarà un polimonio composto di m termini. Segue da ciò, che se si eguagliano tra loro i coefficienti delle stesse potenze di x, si avranno m equazioni di condizione per determinare i coefficienti A, B, C ecc. Noti questi coefficienti, non resta che ad integrare una serie di termini della forma

$$\frac{Adx}{x-a}, \frac{Bdx}{x-b} \text{ecc.};$$

sicchè l' integrale cercato sarà

$$A\log(x-a)+B\log(x-b)+\text{ecc.}+C$$

299 Il metodo che abbiamo seguito, quando le radici del denominatore sono diseguali, non può adoprarsi, se tra esse, che supporremo sempre reali, ve ne sono dell' eguali. Infatti abbiamo veduto, che nell' ipotesi delle radici diseguali, si poteva scrivere

$$\frac{Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)}$$

$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{D}{x-d}+\frac{E}{x-e};$$

se molte di queste radici fossero eguali, come se per esempio si avesse $a=b=c$, l' equazione precedente diverrebbe

$$\frac{Px^4+\text{ecc.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}=\frac{A+B+C}{x-a}+\frac{D}{x-d}+\frac{E}{x-e};$$

in tal caso, riducendo il secondo membro allo stesso denominatore, ed $A+B+C$ potendo esser considerati come una sola costante A', si vede che le tre costanti A', D, ed E non potrebbero bastare per stabilire le cinque equazioni di condizione, che debbono ottenersi dall' eguagliare tra loro i coefficienti delle medesime potenze di x.

300 Per evitare questo inconveniente, cerchiamo di decomporre la frazione

$$\frac{Px^4+Qx^3+\text{ecc}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}$$

in un altro insieme di frazioni, le quali ridotte allo stesso denominatore, possono riprodurla.

Supponiamo dunque

$$\frac{Px^4+Qx^3+\text{ecc.}}{(x-a)^3(x+d)(x-e)}=\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}$$

$$+\frac{D}{x-d}+\frac{E}{x-e.}$$

In questo modo, riducendo il secondo membro di questa equazione allo stesso denominatore, avremo un polinomio in x di quarto grado, che racchiuderà le cinque costanti arbitrarie; ciocchè basterà per stabilire l'identità de' termini affetti dalla stessa potenza di x. Vado ora a dimostrare che il termine

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}$$

possa mettersi sotto la forma

$$\frac{A'}{(x-a)^3}+\frac{B'}{(x-a)^2}+\frac{C'}{(x-a)};$$

A', B', C', sono costanti indeterminate. Per dimostrarlo sia

$$x-a=z;$$

si ha

$$x=a+z;$$

perciò sarà

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}=\frac{A+Ba+Ca^2+Bz+2Caz+Cz^2}{z^3}$$

$$=\frac{A+Ba+Ca^2}{z^3}+\frac{B+2Ca}{z^2}+\frac{C}{z};$$

mettendo in questa equazione il valore di z, si avrà

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}=\frac{A+Ba+Ca^2}{(x-a)^3}+\frac{B+2Ca}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-a},$$

risultamento conforme alla forma adottata, poicchè A′, B′, C′, sono costanti.

Questa dimostrazione potendo applicarsi ad un' equazione di un grado più elevato, conchiudiamo che in generale si può supporre

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}\;.\;.\;.\;.+Rx+S}{(x-a)^m}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{A'}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{m-2}}\cdots+\frac{A''}{x-a}.$$

Risulta da ciocchè precede, che per integrare l' espressione

$$\frac{Px^4+\text{ec.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}dx,$$

bisognerà supporre

$$\frac{Px^4+\text{ec.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^3}+\frac{A'}{(x-a)^2}+\frac{A''}{(x-a)}+\frac{D}{(x-d)}+\frac{E}{(x-a)};$$

riducendo in seguito allo stesso denominatore, si determineranno le costanti A, A′, A″, D, E col metodo che abbiamo esposto; e non resterà che a trovare gl' integrali delle seguenti espressioni

$$\frac{E}{x-e}dx+\frac{D}{x-d}dx,\ \frac{A''}{x-a}dx,\ \frac{A'}{(x-a)^2}dx,$$

$$\frac{A}{(x-a)^3}dx:$$

Le tre prime s' integrano per mezzo de' logaritmi; rispetto alle altre due, come dx è il differenziale di $x-a$ racchiusa nella parentesi, supporremo (art. 270) $x-a=z$, ed avremo

$$\int\frac{A'dx}{(x-a)^2}=\int\frac{A'dz}{z^2}=\int A'z^{-2}=-\frac{A'}{z}=-\frac{A'}{x-a}$$

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^3}=\int\frac{Adx}{z^3}=\int Az^{-3}dz=-\frac{A}{2z^2}=-\frac{A}{2(x-a)^2}.$$

sicché infine sarà

$$\int\frac{Px^4+Qx^3+\text{ec.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}dx=-\frac{A}{2(x-a)^2}-\frac{A'}{x-a}$$

$$+A''\log(x-a)+D\log(x-d)+E\log(x-e)+costan.$$

301. Prendiamo, per esempio, la frazione

$$\frac{2axdx}{(x+a)^2};$$

avremo

$$\frac{2ax}{(x+a)^2}=\frac{A}{(x+a)^2}+\frac{A'}{x+a};$$

riducendo il secondo membro allo stesso denominatore, e sopprimendone questo denominatore comune, resterà

$$2ax = A + A'x + A'a,$$

dalla quale se ne dedurranno quest' equazioni di condizione

$$2a. = A', \quad A + A'a = 0$$

che daranno

$$A' = 2a, \quad A = -2a^2;$$

perciò sarà

$$\frac{2ax\,dx}{(x+a)^2} = -\frac{2a^2dx}{(x+a)^2} + \frac{2a\,dx}{x+a} \quad . \; . \; . \; (23)$$

Per ottenere l' integrale, osserviamo, che essendo dx il differenziale di $x+a$, possiamo supporre $x+a=z$; sicchè sarà

$$\int \frac{2ax\,dx}{(x+a)^2} = -2a^2\frac{dz}{z^2} + 2a\frac{dz}{z}:$$

integrando la prima frazione del secondo membro per mezzo della regola dell' art. 262, e l' altra per mezzo de' logaritmi, otterremo

$$\int \frac{2ax\,dx}{(x+a)^2} = \frac{2a^2}{z} + 2a\log z + C,$$

e rimettendo il valore di z, si avrà

$$\int \frac{2ax\,dx}{(x+a)^2} = -\frac{2a^2}{a+x} + 2a\log(a+x) + C.$$

302. Per secondo esempio, cerchisi l' integrale di

$$\frac{x^2 dx}{x^3-ax^2-a^2x+a^3}:$$

eguagliando a zero il denominatore, si vede, che tutti i termini si distruggono nell' ipotesi di $x=a$; sicchè l'equazione $x^3-ax^2-a^2x+a^3$ è divisibile per $x-a$. Facendo questa divisione, si trova x^2-a^2 per quoziente; sicchè la quantità che dee integrarsi è

$$\frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)(x-a)}=\frac{x^2 dx}{(x+a)(x-a)(x-a)}$$

$$=\frac{x^2 dx}{(x-a)^2(x+a)}.$$

Sicchè supporremo

$$\frac{x^2}{(x-a)^2(x+a)}=\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{A'}{x-a}+\frac{B}{x+a}\ldots(24);$$

riducendo il secondo membro allo stesso denominatore, si ha

$$\frac{x^2}{(x-a)^2(x+a)}=\frac{A(x+a)+A'(x^2-a^2)+B(x-a)^2}{(x+a)(x-a)^2}$$

sviluppando, ed eguagliando tra loro i coefficienti delle stesse potenze di x, si hanno queste equazioni di condizione

$$A'+B=1,\ A-2Ba=0,\ Aa-A'a^2+Ba^2=0\ldots(25)$$

Se la prima si moltiplichi per a^2, e si unisca alla terza, si avrà

$$Aa+2Ba^2=a^2\ ;$$

sommando questa colla seconda dell' equazioni (25) moltiplicata per a, si trova

$$a^2=2Aa,\ \text{ ed }\ A=\frac{1}{2}a:$$

sostituendo questo valore di A nella seconda dell' equazione (25), si ha

$$B=\frac{1}{4}\ ;$$

e per conseguenza la prima da

$$A'=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ ;$$

per mezzo de' valori di queste costanti, l' equazione (24) moltiplicata per dx, diviene

$$\frac{x^2dx}{(x-a)^2(x+a)}=\frac{adx}{2(x-a)^2}+\frac{3dx}{4(x-a)}+\frac{dx}{4(x+a)}.$$

Per integrare $\frac{adx}{2(x-a)^2}$, faremo $x-a=z$, e questa espressione diverrà $\frac{adz}{2z^2}=\frac{az^{-2}}{2}dz$, per cui il suo integrale sarà (art. 262)

$$-\frac{az^{-1}}{2}=-\frac{a}{2z}=-\frac{a}{2(x-a)}:$$

Sicchè sarà

$$\int\frac{x^2dx}{(x-a)^2(x+a)}=-\frac{a}{2(x-a)}+\frac{3}{4}\log(x-a)$$
$$+\frac{1}{4}\log(x+a)+costante.$$

303. Lo stesso si farà, quando nel denominatore vi sono più gruppi di radici eguali. Sia, per esempio

$$\frac{adx}{(x^2-1)^2}=\frac{adx}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

si farà

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A'}{x-1}$$

$$+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}\ \ldots\ (26);$$

riducendo allo stesso denominatore, troveremo

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2}=$$

$$\frac{A(x+1)^2+A'(x-1)(x+1)^2+B(x-1)^2+B'(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

sopprimendo i denominatori, e sviluppando i numeratori, troveremo queste equazioni di condizione

$$A'+B'=0$$
$$A+A'+B-B'=0$$
$$2A-A'-2B-B'=0$$
$$A-A'+B+B'=a.$$

La prima di quest' equazioni riduce la terza a $2A-2B=0$; sicchè sarà $A=B$: la seconda e la quarta sommate danno $2A+2B=a$: queste due ultime equazioni colla somma, e colla sottrazione

danno $A=\frac{a}{4}=B$: per conseguenza la quarta diviene $B'-A'=\frac{1}{2}a$: questa equazione combinata colla prima dà

$$A'=-\frac{a}{4},\ B'=\frac{a}{4}$$

Per mezzo de' valori di queste costanti, il differenziale proposto diviene

$$\frac{1}{4}a\left[\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{dx}{x-1}+\frac{dx}{x+1}\right]:$$

Le due prime frazioni s' integreranno per mezzo delle regole degli articoli (270, e 262) e le altre per mezzo de' logaritmi, e si troverà

$$\int\frac{adx}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{1}{4}a\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\log(x-1)+\log(x+1)\right]$$
$$+C.$$

504. Prima di esaminare il caso, nel quale il denominatore contiene radici imaginarie, facciamo qualche osservazione sopra queste specie di quantità: consideriamo primieramente l' equazione

$$x^2+px+q=0\ .\ .\ .\ (27),$$

e cerchiamo le condizioni necessarie, affinchè le radici di questa equazione siano imaginarie: risolvendo questa equazione si trova

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

La prima condizione necessaria, affinchè sia imaginario questo valore di x, è che l'ultimo termine dell' equazione (27) sia positivo, poicchè se fosse negativo, l' espressione $-q$ che è sotto il radicale, cambierebbe di segno, ed in tal caso, non essendovi sotto il radicale, che quantità positive, x non potrebbe essere imaginario. Quando questa condizione sarà stata soddisfatta, x sarà imaginario se q è maggiore di $\frac{1}{4}p^2$. In tal caso poicchè l' eccesso di q sopra $\frac{1}{4}p^2$ è essenzialmente positivo, rappresentiamolo con β^2, giacchè un quadrato è sempre positivo: avremo dunque

$$q=\frac{1}{4}p^2+\beta^2:$$

facciasi $\frac{p}{2}=\alpha$, ad oggetto di evitare le frazioni, la precedente equazione diverrà

$$q=\alpha^2+\beta^2:$$

questi valori di p, e di q si sostituiscano nell' equazione proposta (27), si troverà

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Sciolta questa equazione, da

$$x=-\alpha\pm\beta\sqrt{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Sicchè le due radici saranno

$$-\alpha+\beta\sqrt{-1}\,,\ \text{e}\ -\alpha-\beta\sqrt{-1}\,;$$

ciocchè mostra che queste radici sono disposte per coppie, tali, che, conosciutane una, si rende nota anche l' altra con cambiare solamente il segno della parte imaginaria.

305. In generale un' equazione può avere molte coppie di radici imaginarie, ed ogni coppia darà luogo ad un fattore di secondo grado, dalla forma

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2 \quad . \; . \; . \; (30).$$

306. Qualche volta le radici imaginarie sono eguali, a meno del segno, e ciò accade quando $\alpha=0$: in tal caso una delle radici è $\beta\sqrt{-1}$, e l' altra $-\beta\sqrt{-1}$, e 'l fattore (30) di secondo grado riducesi a

$$x^2+\beta^2.$$

307. Per dare un esempio di una equazione, le cui radici sono imaginarie, prendo l' equazione

$$x^2-6ax+10a^2=0;$$

risolvendola si ha

$$x=3a\pm\sqrt{-a^2}=3a\pm a\sqrt{-1}$$

paragonando questo valore di x coll' equazione (29), si ha

$$-\alpha=3a\,,\ \beta=a\,;$$

sicchè l' equazione (30) diviene nel presente caso

$$x^2-6ax+9a^2+a^2.$$

308. Del resto quando si ha un' equazione

della forma

$$x^2+4x+12=0\ ,$$

le cui radici sono imaginarie, si può paragonarla immediatamente alla formola (30), e si ha $2\alpha=4$, sicchè sarà $\alpha^2=4$, ed $\beta^2+\alpha^2=12$, se da 12 si toglie 4, resterà $\beta^2=8$; e l' equazione proposta può mettersi sotto la forma

$$x^2+4x+4+8=0.$$

Per verità il termine 8 non è quadrato perfetto; ma in questo caso si riguarda come il quadrato di $\sqrt{8}$.

309. Occupiamoci ora dell' integrazione delle frazioni razionali, i cui numeratori sono il prodotto di fattori imaginarii, e per cominciare dal caso più semplice, esamineremo quello, nel quale vi è una sola coppia di radici imaginarie nel prodotto che rappresenta il denominatore: supponiamo, per esempio, che dopo di aver decomposto il denominatore ne suoi fattori, siasi trovato

$$\frac{P+Qx+Rx^2+Sx^3+ec.}{(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-h)(x^2+2\alpha x+\alpha+\beta^2)}dx:$$

questa frazione si porrà eguale, come si è fatto (art. 300), alla seguente serie di termini

$$\frac{Adx}{x-a}+\frac{Bdx}{x-b}\ldots+\frac{Hdx}{x-h}+\frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}dx\ ;$$

ed avendo determinate le costanti A, B, ... M, N col metodo impiegato al di sopra, tutti questi termini, menochè l' ultimo, s' integreran-

no per mezzo de' logaritmi: Per riguardo all' ultimo l' integrazione si farà nel seguente modo.

Si osserverà che essendo $x^2+2\alpha x+\alpha^2$ un quadrato perfetto, il termine da integrarsi, può scriversi così

$$\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2}dx:$$

facendo $x+\alpha=z$, la precedente espressione diverrà

$$\frac{Mz+N-M\alpha}{z^2+\beta^2}dz;$$

e chiamando P la parte costante $N-M\alpha$, essa riducesi a

$$\frac{Mz+P}{z^2+\beta^2}dz;$$

questa frazione si decompone nelle seguenti

$$\frac{Mzdz}{z^2+\beta^2}+\frac{Pdz}{z^2+\beta^2}:$$

Per integrare la prima frazione, osserveremo, che essendo zdz il differenziale di $z^2+\beta^2$, a meno di un fattore costante, si può (art. 271) supporre $z^2+\beta^2=y$, ciocchè darà differenziando

$$zdz=\frac{dy}{2}:$$

sostituendo questi valori in $\frac{Mzdz}{z^2+\beta^2}$, si avrà $\frac{Mdy}{2y}$, il cui integrale sarà

$$\frac{M}{2}\log y=\frac{M}{2}\log(z^2+\beta^2)=\frac{M}{2}\log[(x+\alpha)^2+\beta^2]$$

$$=\frac{M}{2}\log(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)=M\log(x+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=M\log\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Riguardo all' espressione $\frac{Pdz}{z^2+\beta^2}$, dividendo per β^2 i due termini, essa può mettersi sotto questa forma

$$\frac{P}{\beta}\cdot\frac{\frac{dz}{\beta}}{\frac{z^2}{\beta^2}+1},$$

il cui integrale è

$$\frac{P}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right)=\frac{N-M\alpha}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right);$$

dunque sarà finalmente

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}dx=M\log\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$

$$+\frac{N-M\alpha}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right)\;\ldots\ldots\;(31)$$

310. Prendiamo per esempio la frazione $\frac{a+bx}{x^3-1}dx$: il denominatore avendo $x-1$ per fattore, troveremo l' altro fattore per mezzo della divisione, e la frazione proposta potrà mettersi sotto la forma

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}dx:$$

$x+x+1$, essendo il prodotto di due fattori imaginarii, come può conoscersi, risolvendo l'equazione $x^2+x+1=0$, noi faremo

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}:$$

riducendo allo stesso denominatore, ed operando, come l'abbiamo indicato altra volta, troveremo

$$A=\frac{a+b}{3},\ M=-\frac{a+b}{3},\ N=\frac{b-2a}{3}:$$

in seguito decomporremo il fattore x^2+x+1 in fattori semplici, paragonandolo all' espressione (30), ciocchè ci darà

$$2\alpha=1\ ,\ \alpha^2+\beta^2=1\ ;$$

e perciò

$$\alpha=\frac{1}{2}\ ,\ \beta=\sqrt{\frac{3}{4}}\ ;$$

sostituendo questi valori, e quelli di M ed N nell'equazione (31), che ci dà la seconda parte dell'integrale, ed osservando che la prima è

$$\int\frac{Adx}{x-1}=\frac{a+b}{3}\log(x-1),$$

si troverà

$$\int\frac{(a+bx)}{x^3-1}dx=\frac{a+b}{3}\log(x-1)$$

$$\frac{M}{2}\log y=\frac{M}{2}\log(z^2+\beta^2)=\frac{M}{2}\log[(x+\alpha)^2+\beta^2]$$

$$=\frac{M}{2}\log(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)=M\log(x+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=M\log\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Riguardo all' espressione $\frac{Pdz}{z^2+\beta^2}$, dividendo per β^2 i due termini, essa può mettersi sotto questa forma

$$\frac{P}{\beta}\cdot\frac{\frac{dz}{\beta}}{\frac{z^2}{\beta^2}+1},$$

il cui integrale è

$$\frac{P}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right)=\frac{N-M\alpha}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right);$$

dunque sarà finalmente

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}dx=M\log\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$

$$+\frac{N-M\alpha}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right)\ \ldots\ldots\ (31)$$

310. Prendiamo per esempio la frazione $\frac{a+bx}{x^3-1}dx$: il denominatore avendo $x-1$ per fattore, troveremo l' altro fattore per mezzo della divisione, e la frazione proposta potrà mettersi sotto la forma

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}dx:$$

$x+x+1$, essendo il prodotto di due fattori imaginarii, come può conoscersi, risolvendo l'equazione $x^2+x+1=0$, noi faremo

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1};$$

riducendo allo stesso denominatore, ed operando, come l' abbiamo indicato altra volta, troveremo

$$A=\frac{a+b}{3},\ M=-\frac{a+b}{3},\ N=\frac{b-2a}{3}:$$

in seguito decomporremo il fattore x^2+x+1 in fattori semplici, paragonandolo all' espressione (30), ciocchè ci darà

$$2\alpha=1\ ,\ \alpha^2+\beta^2=1\ ;$$

e perciò

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\sqrt{\frac{3}{4}};$$

sostituendo questi valori, e quelli di M ed N nell' equazione (31), che ci dà la seconda parte dell' integrale, ed osservando che la prima è

$$\int\frac{Adx}{x-1}=\frac{a+b}{3}\log(x-1),$$

si troverà

$$\int\frac{(a+bx)}{x^3-1}dx=\frac{a+b}{3}\log(x-1)$$

$$-\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+x+1}$$

$$+\frac{b-a}{\sqrt{3}}\text{arc}\left[\text{tang}=\frac{(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right]+C$$

311. Allorchè la frazione avrà fattori imaginarii eguali nel suo denominatore, essa conterrà uno o più fattori di secondo grado della forma $(x+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p$, secondochè essa racchiuderà uno o più gruppi di fattori imaginarii eguali. Il fattore

$$(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p$$

corrisponderà alla seguente serie di termini

$$\frac{H+Kx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p}+\frac{H'+K'x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{p-1}}$$

$$+\frac{H''+K''x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{p-2}}\cdots+\frac{H_1+K_1x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}\cdots(32);$$

e dopo di aver fatto lo stesso per gli altri gruppi di fattori eguali, si determineranno le costanti

$$H,\ K,\ H',\ K',\ H'',\ K''\ \ldots\ H_1,\ K_1;\ \text{ec.}$$

e come si è fatto innanzi.

In seguito ogni fratto si moltiplicherà per dx, e non resterà che ad integrare ogni termine separatamente, il che potrà sempre farsi, quando si saprà integrare il primo termine della serie (32) moltiplicato per dx, giacchè tutti gli altri sono della stessa forma. A tal

oggetto scriveremo questo termine nel seguente modo

$$\frac{H+Kx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^p}dx,$$

facendo $x+\alpha=z$, esso diverrà

$$\frac{H-K\alpha+Kz}{(\beta^2+z^2)^p}dz\ ;$$

e chiamando M la parte costante $H-K\alpha$, il termine che dovrà integrarsi sarà

$$\frac{M+Kz}{(\beta^2+z^2)^p}dz\ :$$

Questa frazione può decomporsi in queste due altre

$$\frac{Kzdz}{(\beta^2+z^2)^p}+\frac{Mdz}{(\beta^2+z^2)^p}\ :$$

Per integrare la prima, come zdz è il differenziale di $z^2+\beta^2$, a meno di un fattore costante, supporremo $z^2+\beta^2=y$ (art. 271), ed avremo $zdz=\frac{1}{2}dy$; sostituendo si avrà

$$\int\frac{Kzdz}{(\beta^2+z^2)^p}=\int\frac{1}{2}K\frac{dy}{y^p}=\frac{1}{2}K\int y^{-p}dy$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{Ky^{-p+1}}{1-p}$$

$$=\frac{1}{2}K\frac{(\beta^2+z^2)^{-p+1}}{1-p}=\frac{1}{2}\frac{K}{1-p}\cdot\frac{1}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}+C\ ;$$

non ci resta ad integrare, che $\frac{Mdz}{(\beta^2+z^2)^p}$, o piut-

tosto

$$M(\beta^2+z^2)^{-p}dz \ . \ . \ . \ . \ (33)$$

Per ottenere questo integrale, lo faremo dipendere da quello di $\int(\beta^2+z^2)^p dz$ nel seguente modo:

Diminuendo di una unità l' esponente p è lo stesso che dividere per β^2+z^2; perciò, moltiplicando nel tempo stesso per la stessa quantità, si avrà l' equazione identica

$$(\beta^2+z^2)^p dz=(\beta^2+z^2)^{p-1} \, . \, (\beta^2+z^2)dz;$$

ed eseguendo la moltiplicazione indicata nel secondo membro, ne verrà

$$(\beta^2+z^2)^p dz=\beta^2(\beta^2+z^2)^{p-1}dz+(\beta^2+\alpha^2)^{p-1}z^2dz;$$

integrando, si avrà

$$\int(\beta^2+z^2)^p dz$$
$$=\beta^2\int(\beta^2+z^2)^{p-1}dz+\int(\beta^2+z^2)^{p-1}z^2dz \ . \ . \ . \ (34)$$

De' due integrali che sono nel secondo membro di questa equazione, lasceremo il primo sotto il segno che l' indica; e per riguardo al secondo, vi applichetemo l'integrazione per parti. A tal oggetto, moltiplicando e dividendo per 2 l' espressione $(\beta^2+z^2)^{p-1}z^2dz$, la scriveremo così

$$\frac{z}{2}(\beta^2+z^2)^{p-1}2zdz \ . \ . \ . \ (35)$$

allora $(\beta^2+z^2)^{p-1}2zdz$ sarà il differenziale di $\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}$, di sorta che l' espressione (35) diverrà

$$\frac{z}{2}\,\frac{d(\beta^2+z^2)^p}{p}\ ;$$

paragonandola alla formola

$$\int u dv = uv - \int v du\ ,$$

faremo

$$u=\frac{z}{2}\ ,\ v=\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}\ ,$$

e troveremo

$$\int\frac{z}{2}(\beta^2+z^2)^{p-1}2zdz=\frac{z}{2}\,\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}-\int\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}\cdot\frac{dz}{2}.$$

Sostituendo questo valore in luogo dell' ultimo termine dell' equazione (34), e mettendo le costanti fuori del segno d' integrazione, questa equazione (34), diverrà

$$\int(\beta^2+z^2)^p dz=\beta^2\int(\beta^2+z^2)^{p-1}dz$$
$$+\frac{z}{2}\cdot\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}-\frac{1}{2p}\int(\beta^2+z^2)^p dz:$$

trasportando l' ultimo termine nel primo membro, e riducendo, si troverà

$$\frac{(1+2p)}{2p}\int(\beta^2+z^2)^p dz=\frac{z}{2}\,\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}+\beta^2\int(\beta^2+z^2)^{p-1}dz\ ;$$

da questa equazione se ne tira

$$\int(\beta^2+z^2)^{p-1}dz=-\frac{z}{2p\beta^2}(\beta^2+z^2)^p+\frac{1+2p}{2p\beta^2}\int(\beta^2+z^2)^p dz$$

facendo $p-1=-p$, e perciò $p=1-p$, si ha in fine

$$\int(\beta^2+z^2)^{-p}dz = -\frac{z}{2(1-p)\beta^2}(\beta^2+z^2)^{-p+1}$$

$$+\frac{3-2p}{(2-2p)\beta^2}\int(\beta^2+z^2)^{-(p-1)}dz \;.\;.\;.\;.\;.\; (36).$$

Per mezzo di questa formola, l' integrale di $(\beta^2+z^2)^{-p}dz$ si farà dipendere da un' altro, nel quale il valore numerico dell' esponente, invece di essere p, sarà minore di una unità. In seguito l' integrale di $(\beta^2+z^2)^{-(p-1)}dz$, si farà, per mezzo della stessa formola dipendere da quello di $(\beta^2+z^2)^{-(p-2)}dz$; e così in appresso: di sorta, che dopo ogni sostituzione, l' esponente della parte integrale, diminuendo di una unità, non resterà più in ultimo luogo, che ad integrare l' espressione

$$(\beta^2+z^2)^{-1}dz = \frac{dz}{\beta^2+z^2}:$$

or abbiamo veduto (art. 277) che l' integrale di questa espressione era

$$\frac{1}{\beta}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{z}{\beta}\right).$$

Non si cerca di far dipendere l' integrale di $(\beta^2+z^2)^{-1}dz$ da quello di $\int(\beta^2+z^2)^0 dz$, quantità che riducesi a z; poichè se nella formola (36) si facesse $p=1$, il termine

$$\frac{-z}{2(1-p)\beta^2}(\beta^2+z^2)^{-p+1}$$

diverrebbe infinito

313. Risulta da questa teorica, che l' in-

tegrazione di qualunque frazione razionale non dipenda, che dalle seguenti tre sorte di formole

$$1.\ \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ ;\quad 2.\ \int \frac{dx}{x+a} = \log(x+a)\ ;$$

$$3.\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) :$$

ecco perchè ogni frazione razionale può esser integrata algebricamente, o per mezzo de' logaritmi, o per mezzo di archi di cerchio, o col concorso di questi mezzi.

314. Termineremo questa teorica con un esempio, che comprende tutt'i casi; sia dunque la frazione razionale

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \text{ec.}}{RR'R''\ldots SS'\ldots TT'\ldots UU'} dx\ ;$$

nella quale si ha

$$\left.\begin{array}{l} R = x-a \\ R' = x-b \\ R'' = x-c \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori reali diseguali}$$

$$\left.\begin{array}{l} S = (x-e)^m \\ S' = (x-f)^n \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori reali eguali}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2 \\ T' = x^2+2\alpha' x+\alpha'^2+\beta'^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori imaginarii diseguali}$$

$$\left.\begin{array}{l} U = (x^2+2\alpha_{,}x+\alpha_{,}^2+\beta_{,}^2)^p \\ U = (x^2+2\alpha_{,,}x+\alpha_{,,}^2+\beta_{,,}^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori imaginarii eguali}\ ,$$

si supporrà

$$\frac{Px^m+P'x^{m-1}+P''x^{m-2}+ec.}{RR'R''....SS'....TT'....UU'}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

. . . .

$$+\frac{E}{(x-e)^m}+\frac{E'}{(x-e)^{m-1}}+\frac{E''}{(x-e)^{m-2}}...+ec.$$

$$+\frac{F}{(x-f)^n}+\frac{F'}{(x-f)^{n-1}}+\frac{F''}{(x-f)^{n-2}}...+ec.$$

. . . .

$$+\frac{G+Hx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{K+Lx}{x^2+2\alpha' x+\alpha'^2+\beta'^2}....+ec.$$

. . . .

$$+\frac{M+Nx}{(x^2+2\alpha_{,}x+\alpha_{,}^2+\beta_{,}^2)^p}+\frac{(x^2+2\alpha_{,}x+\alpha_{,}^2+\alpha_{,}^2)^{p-1}}{M'+Nx}+ec.$$

$$+\frac{P+Qx}{(x^2+2\alpha_{,,}x+\alpha_{,,}^2+\beta_{,,}^2)^q}+\frac{P'+Q'x}{(x^2+2\alpha_{,,}x+\alpha_{,,}^2+\beta_{,,}^2)^{q-1}}+ec.$$

ed avendo ridotto allo stesso denominatore, si proseguirà come negli esempii recati precedentemente.

Dell' integrazione delle funzioni irrazionali.

315. Quando in una espressione differenziale, che contiene radicali, questi possono farsi svanire per mezzo di una trasformazione, l' integrazione dipenderà in tal caso da quella delle frazioni razionali.

Possono sempre farsi svanire i radicali di quantità monomie: il metodo, che s' impiegherà per giugnervi, sarà lo stesso di quello, di cui faremo uso nel seguente esempio:
Sia

$$\frac{\sqrt{x}-3a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx\text{, o piuttosto }\frac{x^{\frac{1}{2}}-3a}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}dx;$$

gli esponenti franti si ridurranno allo stesso denominatore; e poicchè il denominatore comune ridotto è 6, si supporrà $x=z^6$; allora si avrà

$$\sqrt{x}=z^3,\ \sqrt[3]{x}=z^2,\ dx=6z^5dz;$$

sostituendo questi valori, si troverà

$$\frac{\sqrt{x}-3a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx=\frac{z^3-3a}{z^2-z^3}\cdot 6z^5dz=6\frac{z^6-3az^3}{1-z}dz;$$

s' integrerà questa espressione col metodo delle frazioni razionali, ed in seguito si sostituirà nell' integrale il valore di z dato per x.

316. Non è lo stesso, quando sotto il segno radicale vi è un polinomio: intanto può integrarsi qualunque espressione che racchiu-

de $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, cioè ogni espressione della forma

$$F(x,\sqrt{A+Bx+Cx^2})dx.$$

Due casi possono accadere, secondochè il termine Cx^2 sarà positivo o negativo; se è positivo, il radicale si scriverà così

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C}+\frac{Bx}{C}+x^2};$$

se questo termine è negativo, lo riguarderemo come il prodotto di $+C$ per $-x^2$, ed allora il radicale potrà mettersi sotto questa forma

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x-x^2}:$$

facciamo, per ragion di semplicità

$$\frac{A}{C}=a\,,\ \frac{B}{C}=b\,;$$

avremo dunque ad integrare le due espressioni $F(x,\sqrt{a+bx+x^2})dx$, $F(x,\sqrt{a+bx-x^2})dx$. Occupiamoci primieramente della prima

Essendo il nostro scopo quello di ottenere, per mezzo di una trasformazione, i valori di x, di dx, e di $\sqrt{a+bx+cx^2}$, in funzione razionale di una nuova variabile z, supporremo

$$\sqrt{a+bx+x^2}=z+x\ (^*)\ldots(37);$$

(*) *Il radicale potrebbe anche farsi eguale*

poicchè elevandosi a quadrato, ed i termini in x^2 distruggendosi, resterà tra z ed x un' equazione di primo grado, dalla quale potranno tirarsi i valori di x, e di dx in funzione razionale di z. Sicchè elevando a quadrato l' equazione (37), e sopprimendo i termini in x^2, si ottiene

$$a+bx=2xz+z^2 \quad . \; . \; . \; (38),$$

dalla quale si ha

$$x=\frac{z^2-a}{b-2z} \quad . \; . \; . \; . \; (39):$$

per mezzo di questo valore, l'espressione (37) diviene

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2-a}{b-2z}+z\,;$$

o riducendo allo stesso denominatore

$$\sqrt{a+bx+x^2}=-\frac{(z^2-bz+a)}{b-2z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40).$$

Ci resta a determinare dx in funzione di z: a tal oggetto differenzieremo l' equazione (38), ed otterremo

$$b\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}z+2z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}z\,,$$

dalla quale tireremo

$$(b-2z)\mathrm{d}x=2(x+z)\mathrm{d}z\,;$$

---

a $z-x$, *poicchè elevando i due membri a quadrato, i termini in* x^2 *svanirebbero egualmente.*

*

e se si elimina il radicale tra l' equazione (37), e l' altra (40), si avrà

$$x+z=-\frac{(z^2-bz+a)}{b-2z};$$

sostituendo questo valore nell' equazione precedente, si troverà

$$(b-2z)dx=-\frac{2(z^2-bz+a)}{b-2z}dz\ ;$$

e

$$dx=-\frac{2(z^2-bz+a)}{(b-2z)^2}dz\ \ldots\ (41)\ (A).$$

317. Prendiamo per esempio

$$\frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}:$$

scriveremo questa espressione nel seguente modo

$$\frac{dx}{\sqrt{C}\,.\,x\sqrt{a+bx+x^2}},$$

facendo $\frac{A}{C}=a$, e $\frac{B}{C}=b$. L' equazione (41) divisa per l' altra (40) ci dà, dopo di aver ridotto

---

(*A*) *Questo valore di* dx *potrebbe più facilmente ottenersi, differenziando l' equazione* (39).

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\frac{2dz}{b-2z}:$$

dividendo l'equazione precedente per l'altra (39), sarà

$$\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+x^2}}=\frac{2dz}{z^2-a}:$$

moltiplicando i denominatori per $\sqrt{C}$, la precedente equazione diverrà

$$\frac{dx}{x\sqrt{C}\sqrt{a+bx+x^2}}, \text{ o}$$

$$\frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{2dz}{(z^2-a)\sqrt{C}},$$

espressione, che s' integra col metodo delle frazioni razionali, poicchè $\sqrt{C}$ può essere riguardata come una costante ordinaria.

318. Per secondo esempio, prendiamo $dx\sqrt{m^2+x^2}$: paragonando il radicale a quello della formola (40), si avrà $a=m^2$, $b=0$; sostituendo questi valori nell' equazioni (40), e (41), avremo

$$\sqrt{m^2+x^2}=\frac{z^2+m^2}{2z};\ dx=-\frac{(z^2+m^2)}{2z^2}dz;$$

sicchè sarà

$$dx\sqrt{m^2+x^2}=-\frac{(z^2+m^2)^2}{4z^3}dz:$$

Dopo di aver integrata questa espressione razionale, vi ci sostituirà il valore di z in x.

319. Il metodo precedente non può essere

impiegato, quando Cx^2 è negativo, perchè col metodo quì sopra adoprato, si avrebbe

$$\sqrt{A+Bx-Cx^2}=\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x-x^2}=$$
$$=\sqrt{C}\sqrt{a+bx-x^2}.$$

Or se supponiamo $\sqrt{a+bx-x^2}=x+z$, elevando a quadrato i due membri di questa equazione, i termini in x^2 non svanirebbero, ed allora il valore di x espresso per z sarebbe irrazionale. Per procedere in questo caso, osserveremo preliminarmente, che il polinomio $a+bx-x^2$ può sempre decomporsi in fattori reali del primo grado. (*) Siano α, α' le radici dell' equazione $x^2-bx-a=0$, si avrà, dietro la proprietà dell' equazioni

$$x^2-bx-a=(x-\alpha)(x-\alpha');$$

e perciò, cambiandosi i segni

$$a+bx-x^2=-(x-\alpha)(x-\alpha')=(x-\alpha)(\alpha'-x);$$

(*) *Per dimostrarlo, scriveremo questo polinomio nel seguente modo*

$$-(x^2-bx-a),$$

ed allora troveremo i fattori di x^2-bx-a, *eguagliando questa espressione a zero; si avrà*

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+a};$$

sicchè per la proprietà dell' equazioni sarà

sostituendo questo valore nel radicale, supporremo

$$\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}=(x-\alpha)z \ldots (42)$$

Questa equazione elevata a quadrato dà

$$(x-\alpha)(\alpha'-x)=(x-\alpha)^2z^2;$$

e sopprimendo il fattore comune $(x-\alpha)$, si avrà

$$\alpha'-x=(x-\alpha)z^2 \ . \ . \ . \ (43)$$

da cui si tira

$$x=\frac{\alpha'+\alpha z^2}{z^2+1};$$

quindi sarà

$$x-\alpha=\frac{\alpha'+\alpha z^2}{z^2+1}-\alpha;$$

e riducendo allo stesso denominatore

$$x-\alpha=\frac{\alpha'-\alpha}{z^2+1} \ . \ . \ . \ (44):$$

$$x^2-bx-a$$

$$=\left(x-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}\right)\left(x-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}\right);$$

e poicchè a *rappresenta una quantità positiva per ipotesi, i fattori, che compongono questo prodotto non possono essere imaginarii. Del resto senza sciogliere l' equazione* $x^2-bx-a=0$ *si può conchiudere dal segno del suo ultimo termine (art. 304), ch' essa ha le sue radici reali.*

questo valore, sostituito nel secondo membro dell' equazione (42), dà

$$\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)^2}=\frac{\alpha'-\alpha}{z^2+1}z\ .\ .\ .\ (45):$$

Per riguardo a dx, basta differenziare l' equazione (44), per averne il valore in z, e si troverà

$$dx=-\frac{2(\alpha'-\alpha)}{(z^2+1)^2}zdz\ .\ .\ .\ (46).$$

320. Applichiamo questo metodo all' esempio

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}:$$

divideremo l' equazione (46) per l' altra (45), e si avrà

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=-\frac{2(\alpha'-\alpha)z}{(z^2+1)^2z\frac{(\alpha'-\alpha)}{z^2+1}}dz=-\frac{2dz}{z^2+1};$$

Sicchè sarà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=-2\text{arc}(\text{tang}=z)+C;$$

e, rimettendo il valore di z dato dall' equazione (42),

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$$

$$=C-2\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}}{x-\alpha}\right)$$

$$=C-2\text{arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{(\alpha'-x)}{x-\alpha}}\right).$$

321. Prendiamo ancora per esempio

$$dx\sqrt{2ax-x^2}=dx\sqrt{x(2a-x)}$$

paragonando questo radicale a quello dell' equazione (42), si avrà $\alpha=0$ $\alpha'=2a$, e l' equazioni (45) e (46) diverranno

$$\sqrt{x(2a-x)}=\frac{2az}{z^2+1};\ dx=-\frac{4az}{(z^2+1)^2}dz:$$

quest' equazioni moltiplicate l' una per l' altra, danno

$$dx\sqrt{2ax-x^2}=-\frac{8a^2z^2dz}{(z^2+1)^3};$$

espressione che 's' integra col metodo delle frazioni razionali.

Dell' integrazione de' differenziali binomii.

322. Abbiamo veduto che uno de' mezzi fecondissimi per integrare delle funzioni, che contengono radicali, era quello di trasformarle in altre funzioni razionali, per potervi applicare il metodo delle funzioni razionali.

La difficoltà consiste nel saper trovare la trasformazione, che conviene ad ogni caso: abbiamo indicata quella che conviene, quando i radicali sono trinomii, ne' quali la variabile non oltrepassi il secondo grado; queste sorti di espressioni, essendo molto frequenti nell' analisi, era di bisogno di far conoscere la tra-

sformazione adattata a renderle razionali. Abbiamo ancora esposto un metodo generale, per rendere razionali le funzioni, che contengono solamente de' monomii elevati a potenze frante; andremo ora ad esaminare, se, per mezzo di una trasformazione, possano rendersi razionali l'espressioni binomie elevate ad esponenti franti.

323. La formola generale dell' espressioni binomie è

$$x^{m-1}(a+bx^n)^p dx \quad (*)$$

Se p è un numero intero, questa formola s' integrerà per mezzo dell' art. 269; ma quando p è una frazione espressa da $\frac{p}{q}$, avremo

$$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx \quad . \; . \; . \; (47)$$

(*) *L' espressione binomia* $Ax^r + Bx^s$, *essendo un caso particolare dell' altra* $(Ax^r+Bx^s)^p$ *perciò ridurremo a questa formola i differenziali binomii: noi potremo scriverla così*

$$[x^r(A+Bx^{s-r})]^p = x^{rp}(A+Bx^{s-r})^p$$

e facendo $s-r=n$, $rp=m-1$, *essa diverrà*

$$x^{m-1}(A+Bx^n)^p:$$

Si è preferito il simbolo $m-1$ *piuttosto che* m *all' altro* rp, *poichè si facilita il così modo di esprimere le condizioni d' integrabilità, come vedremo.*

Per rendere razionale questa espressione, faremo

$$a + bx^n = z^q \ldots (48),$$

o, ciocchè torna allo stesso,

$$(a + bx^n)^{\frac{1}{q}} = z;$$

perciò sarà

$$(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} = z^p \ldots (49)$$

L' equazione (48), differenziata, ci dà

$$bnx^{n-1}dx = qz^{q-1}dz \ldots (50);$$

la stessa equazione (48), risoluta per x, ci dà

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};$$

sicchè elevando i due membri di questa equazione alla potenza m, si ha

$$x^m = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$$

differenziando i due membri, mettendo le costanti fuori, e dividendo per m, si trova

$$x^{m-1}dx = \frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} z^{q-1}dz;$$

sostituendo questo valore nell' equazione (47), e quello di $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$ dato dall' equazione (49), si ha finalmente

$$\frac{q}{nb}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} z^{q+p-1}dz \;.\;.\;.\; (51)$$

Questa espressione è razionale, quando $\frac{m}{n}$ è un numero intero positivo; poichè allora $\frac{z^q-a}{b}$ trovasi elevato ad una potenza intera, e l'espressione (51) può ridursi ad un numero limitato di monomii, ciascuno de' quali può integrarsi col metodo dell' articolo (262), o dell' altro (268). Se $\frac{m}{n}$ è un numero intero negativo, l'espressione (51) diviene parimenti razionale, e può integrarsi col metodo delle frazioni razionali.

324. Prendiamo per esempio l'espressione

$$x^5(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}dx.$$

In questo caso avremo $p=2$, $q=3$,

$$m-1=5,\ o\ m=6,\ n=2;$$

Perciò la condizione d'integrabilità vien soddisfatta: Sostituendo questi valori nell' espressione (51), avremo ad integrare.

$$\frac{3}{2b^3}(z^3-a)^2z^4dz=\frac{3z^{10}}{2b^3}dz-\frac{3az^7}{b^3}dz+\frac{3a^2z^4}{2b^3}dz;$$

sicchè sarà

$$\int x^5(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3z^{11}}{22b^3}-\frac{3az^8}{8b^3}+\frac{3a^2z^5}{10b^3}+C:$$

non resta che a sostituire $(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}$ alla variabile z.

325. Per avere un' altra condizione d' integrabilità, scriviamo l' espressione (47) nel seguente modo

$$x^{m-1}\left[\left(\frac{a}{x^n}+b\right)x^n\right]^{\frac{p}{q}}dx;$$

ed elevando i fattori del prodotto $\left(\frac{a}{x^n}+a\right)x^n$ alla potenza $\frac{p}{q}$, avremo

$$x^{m-1}.x^{\frac{np}{q}}\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^{\frac{p}{q}}=x^{m+\frac{np}{q}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}dx;$$

or la condizione d' integrabilità esige per la precedente dimostrazione la condizione

$$\frac{m+\frac{np}{q}}{n}=\text{ad un numero intero},$$

o, eseguendo la divisione indicata

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\text{ad un numero intero}.$$

326. Prendiamo per esempio l' espressione $x^4dx\sqrt{a+bx^3}$. Scrivendo questa espressione così

$$x^{5-1}(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}dx\,,$$

si ha

$$m=5\,,\ n=3\,,\ p=1\,,\ q=3\,;$$

perciò sarà

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2:$$

Sicchè la formola $x^{5-1}(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}dx$ è integrabile. In questo caso si avrà (art. 325)

$$x^{5-1}(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}dx=x^{5-1}\left(\frac{a}{x^3}+b\right)^{\frac{1}{3}}x dx\;;$$

e riunendo gli esponenti di x, questa espressione, diverrà

$$x^5(ax^{-3}+b)^{\frac{1}{3}}dx\ \ldots\ (52);$$

facendo $ax^{-3}+b=z^3$, troveremo

$$(ax^{-3}+b)^{\frac{1}{3}}=z\,,\ x^{-3}=\frac{z^3-b}{a}\,;$$

ossia

$$\left(\frac{a}{x^3}+b\right)^{\frac{1}{3}}=z\,;\ \frac{1}{x^3}=\frac{z^3-b}{a}\,;$$

L' ultima di quest' equazioni ci da

$$x^3=\frac{a}{z^3-b}\,,$$

da cui si tira, per mezzo della differenziazione

$$x^2dx=-\frac{az^2dz}{(z^3-b)^2}:$$

moltiplicando tra loro queste due ultime equazioni, si ha

$$x^5 dx = -\frac{a^2 z^2 dz}{(z^3 - b)^3} :$$

questo valore di $x^5 dx$, e quello di $(ax^{-3}+b)^{\frac{1}{3}}$ sostituiti nell' espressione (52), danno infine

$$x^5(ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{a^2 z^3 dz}{(z^3 - b)^3},$$

espressione integrabile col metodo delle frazioni razionali.

Delle formole di riduzione de' differenziali binomii.

527.** Quando l' equazione $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ non soddisfa alle condizioni d' integrabilità stabilite, vi ci si può applicare l' integrazione per parti nel seguente modo:

Paragonando la formola $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ al primo membro dell' equazione

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

si supporrà

$$(a+bx^n)^p = u, \ x^{m-1}dx = dv; \text{ sarà } v = \frac{x^m}{m};$$

e mettendo le costanti fuori del segno d' integrazione, avremo

$$\int x^{m-1}dx(a + bx^n)^p = (a+bx^n)^p \frac{x^m}{m}$$

$$-\frac{pnb}{m}\int x^{m}(a+bx^{n})^{p-1}x^{n-1}dx\ ,$$

o, riunendo gli esponenti di x,

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{p}=(a+bx^{n})^{p}\frac{x^{m}}{m}$$

$$-\frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^{n})^{p-1}dx\ \ldots\ (53);$$

d'altronde si ha l' equazione identica

$$(a+bx^{n})^{p}=(a+bx^{n})^{p-1}(a+bx^{n})$$

$$=a(a+bx^{n})^{p-1}+bx^{n}(a+bx^{n})^{p-1};$$

moltiplicando i due membri per $x^{m-1}dx$, si trova

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{p}=a\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{p-1}$$

$$+b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^{n})^{p-1}\ \ldots\ (54):$$

Per mezzó di questa equazione si può eliminare l' ultimo termine dell' equazione (53); poicchè se l' equazione (54) si moltiplica per $\frac{pn}{m}$, e si sommi coll'altra (53), si troverà

$$\left(1+\frac{pn}{m}\right)\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{p}$$

$$=(a+bx^{n})^{p}\frac{x^{m}}{m}+\frac{pna}{m}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{p-1};$$

moltiplicando per m, e dividendo in seguito pel fattore costante del primo membro, si otterrà

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m}{(m+pn)}(a+bx^n)^p$$

$$+\frac{pna}{m+pn}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} \quad . \; . \; . \; (55):$$

Per mezzo di questa formola l' integrale di $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ si potrà far dipendere da un altro, nel quale l' esponente p posto fuori delle parentesi è minore di una unità.

Se in seguito si mette in questa formola $p-1$ in luogo di p, l' integrale di $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}$ dipenderà da quello di $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-2}$; collo stesso metodo questo potrà farsi dipendere da $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-3}$ e così in seguito; di sorta che l' esponente della parentesi sarà successivamente p, $p-1$, $p-2$, $p-3$ . . . $p-n$. (Per n rappresentiamo il maggior numero intero contenuto in p, che supponesi una frazione). Se si può ottere l'integrale di $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-n}$, si avrà quello, in cui l' esponente di $a+bx^n$ è maggiore di una unità, e così in seguito, fino all' integrale di $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$, che si otterrà in questo modo in un numero limitato di numeri algebrici.

328. Se p fosse negativo, l' equazione (55) sciolta per rispetto alla potenza $p-1$ di $a+bx^n$ darebbe

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}$$

$$=\frac{-x^m(a+bx^n)^p+(m+pn)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{pna}$$

facendo $p-1=q$, e quindi $p=q+1$, si avrebbe;

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^q =$$

$$\frac{-x^m(a+bx^n)^{q+1}+[m+(q+1)n]\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{q+1}}{(q+1)na} \quad ..(56),$$

formola, nella quale, se si fa q negativo, l'integrale proposto dipenderà da un altro, nel quale l'esponente della parentesi sarà più vicino a zero di una unità.

329. Si può anche diminuire l'esponente di x fuori delle parentesi. A tal oggetto si eguaglieranno tra loro i secondi membri dell'equazioni (55) e (54), essendo eguali i primi, ciocchè darà

$$(a+bx^n)^p\frac{x^m}{m}-\frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$
$$= a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}$$
$$+b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1},$$

da cui si tirerà

$$\left(b+\frac{pnb}{m}\right)\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

$$=(a+bx^n)^p\frac{x^m}{m}-a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1};$$

moltiplicando per m, ed indi dividendo $b(m+pn)$, si avrà

$$\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$
$$=\frac{(a+bx^n)^p x^m-ma\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{b(m+pn)};$$

mettendo m invece di $m+n$, e p invece di

$p-1$; e quindi $m-n$ invece di m, e $p+1$, in luogo di p, questa equazione diverrà

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$$
$$=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n}-(m-n)a\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{b(m+pn)} \ldots (57).$$

Per mezzo di questa formola l' integrale dipenderà da un altro, nel quale la parte x^{m-1}, fuori della parentesi, diviene x^{m-n-1}; questo secondo integrale dipenderà da un terzo, nel quale l' esponente della parte fuori delle parentesi sarà $m+2n-1$; e così continuando, gli esponenti di x fuori della parentesi saranno successivamente $m-1, m-n-1, m-2n-1, m-3n-1 \ldots m-rn+1$. (Per rn s' intende il maggior moltiplice racchiuso in m).

All' ultima di queste operazioni l' esponente di x fuori la parentesi nel secondo membro dell' equazione di riduzione sarà dunque $m-rn-1$; perciò x nel primo membro di questa equazione avrà per esponente $m-(r-1)n-1$, per ciò mettendo m invece di $m-(r-1)n$ nella formola (57), e rappresentando con X la parte integrata, questa formola ci darà

$$\int x^{m-(n-1)n-1}dx(a+bx^n)^p$$
$$=\frac{X-(m-rn)a\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^p}{b[m-(r-1)n+pn]} \ldots (58).$$

Se è $rn=m$, il coefficiente $m-rn$ è zero, ciocchè fa svanire nel secondo membro dell' equazione precedente, il termine affetto dal segno d' integrazione, e resterà

$$\int x^{m-(r-1)n-1}dx(a+bx^n)^p=\frac{X}{bn(1+p)}.$$

Essendo questo integrale determinato esattamente, lo saranno a suo luogo tutti gli altri; perciò la formola proposta è allora integrabile.

530. Abbiamo supposto m positivo nella formola (57), che s' impiega per diminuire l' esponente fuori la parentesi; per aver quella, che conviene al caso in cui m è negativo, si risolverà la formola (57) per riguardo al secondo termine del secondo membro, e si avrà

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p$$
$$=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n}-b(m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{(m-n)a}$$

mettendo m in vece di $m-n$, e perciò $m+n$ in vece di m, la precedente formola diverrà

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=$$
$$\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^m-b(m+n+np)\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^p}{ma}\ldots(59).$$

Per mezzo di questa formola, quando l' esponente fuori la parentesi è negativo, l' integrale dipenderà da un altro, nel quale il valore di questo esponente è minore di n unità; poichè essendo $m+n-1$, l' esponente di x fuori le parentesi nel secondo membro dell' equazione (59), se si rimpiazza m per mezzo del suo valore negativo, che rappresenteremo un $-m'$, questo esponente diverrà $-(m'-n)-1$, mentre che quello di x ch' è fuori la parentesi nel primo membro è $-m'-1$; e non considerando che i valori numerici di questi esponenti, è chiaro che $-(m-n)-1$ sorpasserà $-m-1$, di n unità.

531. Per applicare queste formole, sia

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}:$$

Mettasi questa espressione sotto la forma
$x^m dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, e paragonandola ad
$x^{m-1}dx(a+bx^m)^p$, si avrà

$$m-1=m,\ \text{o}\ m=m+1,\ a=1\ b=-1,\ n=2,$$

$$p=-\frac{1}{2}.$$

L'esponente delle parentesi avendo un valore numerico minore dell' unità, cercheremo diminuire l' esponense fuori la parentesi, ed in conseguenza sostituiremo i valori precedenti nella formola (57), ciocchè la cambierà in questa

$$\int x^m dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-x^{m-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m}+\frac{m-1}{m}\int x^{m-2}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

o

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}$$

$$+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}\ \ldots\ (60)$$

Se si metta successivamente $m-2$, $m-4$, $m-6$, invece di m, si avrà

per $m=m-2 \ldots \int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-3}\sqrt{1-x^2}}{m-2}$

$$+\frac{m-3}{m-2}\int\frac{x^{m-4}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

per $m=m-4 \ldots \int \frac{x^{m-4}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-5}\sqrt{1-x^2}}{m-4}$

$$+\frac{m-5}{m-4}\int\frac{x^{m-6}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

per $m=m-6 \ldots \int \frac{x^{m-6}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-7}\sqrt{1-x^2}}{m-6}$

$$+\frac{m-7}{m-6}\int\frac{x^{m-8}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

e così in seguito

La prima di queste equazioni ci darà il valore di $\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, che si sostituirà nell' equazione (60). e si troverà

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^{m-1}}{m}+\frac{m-1}{m}\cdot\frac{x^{m-3}}{m-2}\right)$$

$$+\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\int\frac{x^{m-4}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

In seguito ne' risultamenti che si avranno, si sostituiranno successivamente i valori di

$$\int\frac{x^{m-4}dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ e di } \int\frac{x^{m-6}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

se m è un numero intero pari, l'ultimo integrale che si otterrà, sarà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\text{sen} = x);$$

se poi m è un numero intero dispari, l'ultimo integrale sarà

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

e come $x dx$ è il differenziale di x^2, a meno di un fattore costante, faremo $1 - x^2 = z$, ciocchè darà

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int -\frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= \int -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = -z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Essendo stato trovato l'ultimo integrale; dobbiamo conchiudere, che quando m sarà un numero intero, la formola potrà sempre integrarsi.

332. Prendiamo ancora per esempio

$\dfrac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$: scrivendo questa espressione così

$$x^{-m}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

si paragonerà alla formola (59) per diminuire l'esponente fuori della parentesi, e si avrà

$$m-1 = -m, \; b = -1, \; n = 2, \; p = -\frac{1}{2};$$

per mezzo di questi valori la formola (59), diverrà

$$\int x^{-m}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-m}x^{1-m}$$

$$+\frac{2-m}{1-m}\int x^{-m+2}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

o piuttosto

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}}$$

$$+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}\;\ldots\;(61).$$

Se m è un numero pari, p e, 8, l'integrale di $\frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}}$ dipenderà da quello di $\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}$; questo, in virtù della stessa formola, dipenderà da quello di $\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$ fino ad $m=2$: in quest' ultimo caso poi la formola (61) darà

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

di sortachè; allorchè m è pari, l' integrale si otterrà per mezzo di successive sostituzioni.

Nel caso di m dispari, per esempio 7, mettendo successivamente 7, 5, 3 in luogo

di m nella formola (61), non si potrà continuare fino all'ipotesi di $m=1$; poichè, in tal caso, il coefficiente $\frac{m-2}{m-1}$ del secondo integrale diverrebbe $-\frac{1}{0}=-\infty$; perciò il minimo valore che potrà darsi ad m, sarà $m=3$: allora la formola (61) diverrà

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Per integrare l'espressione $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ faremo $x=\frac{1}{z}$, ciocchè ci darà

$$dx=-\frac{dz}{z^2},\ \text{e}\ \sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{z^2-1}}{z};$$

e perciò

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}};$$

abbiamo trovato (art. 288)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log(x+\sqrt{x^2-1});$$

sicchè cambiando x in z, avremo

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\log(z+\sqrt{z^2-1});$$

rimettendo per z il valore $\frac{1}{x}$, si avrà

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$$

$$+C = -\log\frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{x}+C.$$

Perciò la formola $\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$ può integrarsi, o che prendasi m pari, o dispari. **

Dell' integrazione delle quantità, che racchiudono seni e coseni.

333. Poichè l' integrazione delle quantità, che racchiudono seni e coseni dipende dalla possibilità di sviluppare $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, ec. in funzioni di cose $\cos 2x$, $\cos 3x$, ec. andremo a dimostrare preliminarmente, come vi ci si può giugnere per mezzo della sola trigonometria (*nota terza*)
Se nella formola
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$ . . . (62)
si fa $a=b$; si avrà

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \cos^2 a$$

$$-(1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1;$$

da questa equazione si tira

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a;$$

moltiplicando questa equazione per $\cos a$, si ha

$$\cos^3 a = \frac{1}{2}\cos a + \frac{1}{2}\cos a \cos 2a \ldots (63):$$

or se l' equazione (62) si somma coll' altra

$$\cos(b-a) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

si otterrà

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(b-a);$$

facendo $b=2a$, si avrà

$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{2}\cos 3a + \frac{1}{2}\cos a:$$

eliminando $\cos a \cos 2a$ per mezzo dell' equazione precedente, e dell' altra (63), si troverà

$$\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a.$$

Nello stesso modo si calcolerebbero le potenze superiori di $\cos a$

354. Ciò posto, quando si dovrà integrare l' espressione $\cos^m x dx$, in cui m è un numerò intero, si sostituirà a $\cos^m x$ il suo sviluppo, il quale, da ciocchè precede, non conterrà che termini della forma
costante, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, ec, di sorta che tutto riducesi a saper integrare un termine della forma $\cos mx dx$. A tal oggetto, osserveremo che se nell' equazione

$$d\operatorname{sen} z = \cos z dz,$$

si fa $z = mx$, si avrà

$$d\,\text{sen}\,mx = \cos mx . m\,dx\,;$$

sicchè sarà $\cos mx\,dx = \frac{d\,\text{sen}\,mx}{m}$, e

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\int d\,\text{sen}\,mx}{m} = \frac{\text{sen}\,mx}{m};$$

nello stesso modo si troverebbe che

$$\int \text{sen}\,mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m}.$$

Prendiamo per esempio $\cos^2 x\,dx$: mettendo per $\cos^2 x$ il suo valore $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ avremo

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}\,2x + C.$$

335. Se si volesse integrare $\text{sen}^m x\,dx$, si seguirebbe lo stesso metodo, o pure rappresentando con z l'arco complemento di x, si avrebbe

$$x = \frac{1}{2}\pi - z\,,\ \text{e}\ dx = -dz\,,\ \text{sen}\,x = \cos z :$$

sicchè la formola $\text{sen}^m x\,dx$ si trasformerebbe in $-\cos^m z\,dz$, la quale s' integrerebbe come qui sopra

336. Consideriamo il caso più generale $\text{sen}^m x \cos^n x\,dx$; se m è pari, si farà $m = 2m'$, e l'espressione, che dovrà integrarsi, sarà

$$\text{sen}^{2m'} x \cos^n x\,dx = (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x\,dx :$$

Si svilupperà $(1-\cos^2 x)^{m'}$, e moltiplicando per $\cos^n x dx$, si otterrà una serie di termini, ciascuno della forma $\cos^k x dx$, i quali s' integreranno come quì sopra. Se m è dispari, si farà $m = 2m' + 1$, e si avrà

$$\operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \operatorname{sen}^{2m'} x \cos^n x \operatorname{sen} x dx$$
$$= (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x \times -d\cos x$$

facendo $\cos x = z$, questa espressione si cambierà in

$$-(1-z^2)^{m'} z^n dz\,;$$

m', ed n essendo intieri per ipotesi, si eseguirà lo sviluppo, e s' integrerà.

337. Per applicare questo metodo alle espressioni

$$\frac{\cos^m x dx}{\operatorname{sen}^n x}, \quad \frac{\operatorname{sen}^n x dx}{\cos^m x},$$

come la seconda acquista la forma della prima, con fare $x = \frac{\pi}{2} - z$, non prenderemo in considerazione che la sola prima. Se m è pari, supporremo $m = 2m'$, ed avremo

$$\frac{\cos^m x dx}{\operatorname{sen}^n x} = \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{m'}}{\operatorname{sen}^n x}$$

$$= \frac{1 - m' \operatorname{sen}^2 x + m' \frac{m'-1}{2} \operatorname{sen}^4 x^2 + \text{ecc.}}{\operatorname{sen}^n x} dx$$

espressione, il cui integrale dipenderà da quelle di $\operatorname{sen}^l x dx$, e da $\frac{dx}{\operatorname{sen}^i x}$.

L' integrazione della prima si conosce, e da qui a poco vedremo come s' integra la seconda. Se m è dispari, facendo $m=2^{m'}+1$, si avrà

$$\frac{\cos^m x dx}{\text{sen}^n x}=\frac{(1-\text{sen}^2 x)^{m'}\cos x dx}{\text{sen}^n x}$$

$$=(1-m'\text{sen}^2 x+\text{ec})\frac{\cos x dx}{\text{sen}^n x},$$

espressione, il cui integrale dipenderà da quelli di $\text{sen}^l x\cos x dx$, e di $\frac{dx\cos x}{\text{sen}^k x}$, abbiamo trattato della prima nell' (art. 335); occupiamoci della seconda. Per integrare $\frac{dx\cos x}{\text{sen}^k x}$, faremo $\text{sen}x=z$; e sarà $dx\cos x=dz$, e perciò

$$\int\frac{dx\cos x}{\text{sen}^k x}=\int\frac{dz}{z^k}=\int z^{-k}dz=\frac{z^{-k+1}}{1-k}+C.$$

Per ciocchè riguarda l' integrale di $\frac{dx}{\text{sen}^k x}$, la stessa trasformazione cambierà questa espressione in $\frac{dz}{z^k\sqrt{1-z^2}}$, formola che si sa integrare.

338. Infine se si dee integrare $\frac{dx}{\cos^m x\,\text{sen}^n x}$, si moltiplicherà questa espressione per $\cos^2 x+\text{sen}^2 x$, restando con ciò identica, per esser $\text{sen}^2 x+\cos^2=1$; si avrà

$$\frac{dx}{\cos^m x \operatorname{sen}^n x}=\frac{dx}{\cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x}+\frac{dx}{\cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x},$$

con questo mezzo si diminuirà la somma degli esponenti dal denominatore; e ripetendo questa operazione un certo numero di volte, e mettendo successivamente a parte tutte le frazioni, che, ne' loro denominatori, contengono una sola potenza di un seno, e di un coseno (poicchè si conosce l' integrazione di queste quantità), nell' ultima operazione la formola precedente si ridurrà a de' termini, che potranno ancora contenere delle potenze di seno, e di coseno, e che avranno le forme seguenti.

$$\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x},\ \frac{dx}{\cos x},\ \frac{dx}{\operatorname{sen}x}.$$

Per integrare $\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x}$, il numeratore si moltiplicherà per $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x$ e si avrà

$$\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x}=dx\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+dx\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$
$$=\frac{d\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}-\frac{d\cos x}{\cos x},$$

espressione, il cui integrale è

$$\log\operatorname{sen}x-\log\cos x+\log C=\log C.\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$
$$=\log C\operatorname{tang}x.$$

Per integrare $\frac{dx}{\operatorname{sen}x}$; si farà $\cos x=z$, e si avrà.

$$dx=-\frac{dz}{\operatorname{sen}x},\ \text{e}\ \frac{dx}{\operatorname{sen}x}=-\frac{dz}{\operatorname{sen}^2x}=-\frac{dz}{1-z^2};$$

formola integrabile col metodo delle frazioni razionali.

Per ciocchè riguarda $\frac{dx}{\cos x}$, si supporrà $\operatorname{sen}x=z$, e si troverà

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

339. In generale l'espressioni, che contengono seni e coseni possono sempre trasformarsi in altre, che non ne racchiudono, a tal oggetto, basta di diporre $\operatorname{sen}x$, o $\cos x$ eguali ad una nuova variabile z. Per esempio se nell' espressione $\operatorname{sen} x\cos^n x dx$, si suppone $\operatorname{sen}x=z$, si avrà.

$$\cos x=\sqrt{1-z^2},\ \text{e}\ dx=\frac{dx}{\sqrt{1-z^2}}$$

sostituendo si troverà

$$\operatorname{sen}^m x\cos^n dx=z^m(1-z^2)^{\frac{n}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz$$
$$=z^m(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}dz,$$

espressione che si rapporta a' differenziali binomii.

Si può ancora applicare l' integrazione per parti all' espressione (*) $\operatorname{sen}^m x\cos^n x dx$.

(*) *Per paragonarla ad udv si decomporrà così*

$$\operatorname{sen}^{m-1}x\cos^n x\operatorname{sen}x dx=-\operatorname{sen}^{m-1}x d\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x$$

340. Infine le formole trigonometriche possono essere ancora impiegate con vantaggio in certi casi. Per esempio per integrare $\operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$; come la trigonometria da

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a+b) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a-b);$$

paragonando l'espressione $\operatorname{sen} mx \cos nx$ a questa formola, si troverà

$$\operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}[(m+n)x]dx$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{sen}[(m-n)x]dx$$

e l'integrale sarà (art. 334)

$$C - \frac{1}{2}\,\frac{\cos[(m+n)x]}{m+n} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos[(m-n)x]}{m-n}.$$

Dell' integrazione delle quantità esponenziali, e logaritmiche

341. Abbiamo dimostrato (art. 37), che, nel sistema de' logaritmi neperiani, si avea $da^x = a^x dx \log a$, dunque reciprocamente sarà

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$$

Ciò può servirci per integrare l'espressione generale $a^x X, dx$ nella quale X è una funzione di x. A tale oggetto scriveremo così questa espressione, $X \,.\, a^x dx$, ed integrando per parti, si avrà.

$$\int X.a^x dx = \frac{X.a^x}{\log a} - \int \frac{a^x}{\log a} dX \quad . \ . \ . \ . \ (64).$$

Ciò posto, differenziando successivamente la funzione X, ne tireremo $dX = X'dx$; $dX' = X''dx$, ecc., sicchè

$$\int \frac{a^x}{\log a} dX, \text{ o } \int \frac{X'}{\log a} . a^x dx = \frac{X'}{(\log a)^2} a$$

$$- \int \frac{a^x}{(\log a)^2} dX';$$

sostituendo questo valore all' ultimo termine dell' equazione (64), otterremo

$$\int Xa^x dx - \frac{Xa^x}{\log a} = \frac{X.'a^x}{(\log a)^2} + \int \frac{a^x}{(\log a)^2} dX':$$

Continuando nello stesso modo, giungeremo a questo sviluppo

$$\int Xa^x dx$$

$$= a^x \left(\frac{X}{\log a} - \frac{X'}{(\log a^2)} + \frac{X''}{(\log a)^3} \right.$$

$$\left. - \frac{X'''}{(\log a)^4} \dots \pm \frac{X^{(n)}}{(\log a)^{n+1}} \right) \mp \int \frac{a^x dX^{(n}}{(\log a)^{n+1}}$$

Se prendendo la serie de' coefficienti differenziali X', X'', X''' ... $X^{(n)}$, l' ultimo di questi è costante, si avrà $dX^{(n)} = 0$, ed allora la parte integrale svanirà

342. Prendiamo per esempio $X = x^3$, d' onde si tira
$X' = 3x^2$, $X'' \dots 2 . 3x$, X''' o $X^{(n)} = 2 . 3$; sarà

$$\int x^3 a^x dx$$

$$= a^x \left(\frac{x^3}{\log a} - \frac{3x^2}{(\log a)^2} + \frac{2.3x}{(\log a)^3} - \frac{2.3}{(\log a)^4} \right).$$

Se si fa $a = e$, base del sistema Neperiano, $\log a$ diverrà $\log e$; or $\log e = 1$, in virtù dell' equazione $e^{\log e} = e$, perciò sarà

$$\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 2.3x - 2.3).$$

343. Si può ancora giugnere ad un altro sviluppo di $\int a^x.Xdx$. A tal oggetto facciamo $\int Xdx = P$, $\int Pdx = Q$, $\int Qdx = R$, ecc., ed integriamo per parti; avremo

$$\int a^x Xdx = a^x P - \int a^x \log a Pdx \ldots (65)$$

$$\int a^x \log a Pdx = a^x \log a.Q - \int a^x (\log a)^2 Qdx$$

e sostituendo, l' equazione (65) diverrà

$$\int a^x.Xdx = a^x P - a^x \log a Q + \int a^x (\log a)^2 Qdx$$

e continuando ad integrar per parti, si avrà in generale

$$\int a^x.Xdx = a^x (P - Q\log a + R(\log a)^2 - \text{ec.}) \ldots$$
$$\pm \int Z a^x (\log a)^n dx.$$

344. Se questa formola si applica al caso, in cui è $X = \frac{1}{x^5}$, si troverà

$$P = -\frac{1}{4x^4}, Q = \frac{1}{3.4x^3}, R$$
$$= -\frac{1}{2.3.4x^2}, Z = \frac{1}{2.3.4.x},$$

dunque sarà

$$\int \frac{a^x dx}{x^5} = a^x \left(-\frac{1}{4x^4} - \frac{\log a}{3.4x^3} - \frac{\log a^2}{2.3.4x^2} \right)$$
$$- \frac{\log a^3}{2.3.4} \int \frac{a^x dx}{x} :$$

L' integrale di $\frac{a^x dx}{x}$ è una funzione trascendente, che non si è potuta determinare finora.

345. In generale si vede che qualunque potenza negativa ed intera si prenda per esponente di x, s'incontra sempre $\int \frac{a^x dx}{x}$; poicchè nelle funzioni successive P, Q, R ec. gli esponenti di x, diminuendo sempre di una unità, l'ultima di queste funzioni dee essere della forma $\frac{A}{x}$, e perciò l'ultimo integrale sarà

$$\int \frac{Aa^x}{x} dx = A \int \frac{a^x dx}{x},$$

perchè A è costante.

Per avere un valor prossimo al vero dell' integrale di $\frac{Aa^x dx}{x}$, non si ha altro mezzo, che quello di sostituire in questa espressione lo sviluppo di a^x, che è, come si è veduto

$$1 + x\log a + \frac{x^2}{2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{2.3} (\log a^3) \text{ ec.}$$

e d' integrare in seguito ogni termine.

346. Se nell' equazione $\frac{du}{u} = d\log u$, o $du = u d\log u$, si faccia $u = x^y$, si avrà

$$dx^y = x^y d\log x^y;$$

perciò tutte le volte che un differenziale potrà decomporsi in due valori, uno de' quali sia rappresentato da x^y, e l' altro da $d\log x^y$, l' integrale sarà $x^y + C$.

347. L' integrazione per parti può anche applicarsi a quella dell' espressione $Xdx(\log x)^n$; poicchè se rappresentisi con X_1 l' integrale di Xdx, si avrà

$$\int Xdx(\log x)^n$$

$$= X_1(\log x)^n - n\int \frac{X_1}{x} dx(\log x)^{n-1}.$$

Quest' ultimo integrale si farà dipendere da un altro della forma $\int X n d_{11}(\log x)^{n-2}$ e così in seguito.

Della serie di Gio: Bernulli.

348. Abbiamo veduto, che molte espressioni differenziali non erano integrabili, che dopo essere state ridotte in serie, e che perciò designando con Xdx una formola differenziale, nella quale X indica una qualunque funzione di x, bisognava preliminarmente ridurre in serie la funzione rappresentata da X, ed in seguito fare le integrazioni, dopo aver sostituito questo sviluppo nella formola Xdx.

La serie di Bernulli ha il vantaggio di ri-

durre $\int X dx$ in serie, anche prima che sia data la forma di X : questa serie è nel calcolo integrale ciocch'è quella di Taylor nel differenziale. Eccone la dimostrazione : Integrando primieramente $X dx$ per parti, si paragonerà $\int X dx$ al primo termine della formola

$$\int u dv = uv - \int v du ;$$

perciò sarà

$$\int X dx = Xx - \int x dX \quad . \; . \; . \; (66);$$

prendendosi l'integrale per rispetto ed x avremo

$$dX = \frac{dX}{dx} dx ;$$

e perciò

$$\int x dX = \int \frac{dX}{dx} x dx$$

Integrando ancora per parti, u sarà rappresentato da $\frac{dX}{dx}$ e dv da $x dx$, di sortachè avremo $v = \frac{x^2}{2}$; perciò si troverà

$$\int \frac{dX}{dx} x dx = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{d^2X}{dx}$$

$$= \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^2X}{dx} \quad . \; . \; . \; (67);$$

sostituendo a $\frac{d^2X}{dx}$ la quantità $\frac{d^2X}{dx^2}.dx$, ed operando nello stesso modo, otterremo

$$\int x^2\frac{d^2X}{dx},\ e\int\frac{d^2X}{dx^2}.x^2dx=\frac{1}{3}x^3\frac{d^2X}{dx^2}$$

$$-\frac{1}{3}\int x^3\frac{d^3X}{dx^3}\ldots\ (68);$$

e così in seguito.

Sostituendo il valore del primo membro dell' equazione (67) nell' equazione (66), e portando in seguito nel risultamento quello del primo membro dell' equazione (68), otterremo

$$\int Xdx=Xx-\frac{dX}{dx}.\frac{x^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^2X}{dx^2}.\frac{x^3}{1.2.3}-\text{ec.}+cost.$$

Della quadratura delle curve

349. Sia s (Fig. 21) la superficie $abb'p'$ Fig. 21 di una curva piana: se l'ascipa $ap'=x$ diviene $ap''=x+h$, l'aja s diverrà

$$\text{aja}\,abb''p''=s+\frac{ds}{dx}h+\frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{ec.}$$

e perciò sarà

$$aja\ mistilinea\,p'b'b''p''=abb''p''-abp'p'$$

$$=\frac{ds}{dx}h+\frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{ec:}$$

quest' aja è racchiusa tra' due rettangoli $p'b''$, e $p''b'$, de' quali si possono facilmente prendere l'espressioni analitiche; infatti si ha

il rettangolo $p'b'' = p''b''.p''p' = f(x+h)h$

il rettangolo $p''b' = p'b'.p''p' = fx.h$,

il rapporto di questi rettangoli è

$$\frac{f(x+h).h}{fx.h} = \frac{f(x+h)}{fx}:$$

nel caso del limite questo rapporto riducesi a

$$\frac{fx}{fx} = 1:$$

o poichè la superficie mistilinea $p'b'b''p''$ è compresa tra due rettangoli $p'b''$, $p''b'$, la sua differenza dal rettangolo $p''b''$ è minore di quella che vi è tra lo stesso rettangolo $p''b'$, e l'altro $p'b''$; sicchè se nel caso del limite si ha $\frac{p'b''}{p''b'} = 1$, a più forte ragione l'unità sarà il limite del rapporto

$$\frac{aja\, p'b'b''p''}{rettangolo\, p''b'};$$

rimpiazzando i termini di questo rapporto per mezzo delle loro espressioni analitiche si avrà

$$\frac{\frac{ds}{dx}h + \frac{d^2s}{dx^2}.\frac{h^2}{2} + \text{ec.}}{fx.h} = \frac{\frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2}.\frac{h}{2} + \text{ec.}}{fx};$$

si passerà al limite, facendo $h = 0$, e si tro-

verà $\frac{ds}{dxfx} = 1$, da cui si ha $ds = fxdx$, e mettendo l'ordinata y per fx si avrà finalmente.

$$ds = y\,dx \ldots (69)$$

350. Il differenziale dell'aja di una curva si può benanche determinare col metodo degl' infinitamente piccoli nel seguente modo. Fig. 21

$$trapezio\ p'b'b''p'' = \frac{p'b' + p''b''}{2} \cdot p'p''$$

$$= \frac{y + (y + dy)}{2} . dx = y\,dx + \frac{dxdy}{2};$$

rigettando $dxdy$ come infinitamente piccolo di second' ordine, resterà ydx per indicare l'espressione del differenziale che si cerca.

351. Per prima applicazione cerchisi l'aja di una porzione BMP di parabola (Fig. 21). Fig. 21 Sia $y^2 = mx$ l'equazione di questa parabola, la di cui origine è B; differenziando si trova $2ydy = mdx$; sicchè sarà $dx = \frac{2y}{m} dy$, e

perciò $ydx = \frac{2y^2}{m} dy$; integrando si avrà

$$\int \frac{2y^2}{m} dx = \frac{2y^3}{3m} + C \ldots (70).$$

Per determinare la costante, osservisi che, nell' ipotesi di $y = 0$, l'integrale ch' esprime la superficie cercata, è anche nullo: questa sup-

posizione riduce l' equazione (70) a $o=o+C$; sicchè sarà

$$\int y\mathrm{d}x=\frac{2y^3}{3m}=\frac{2y}{3m}y^2=\frac{2y}{3m}.mx=\frac{2}{3}xy.$$

352. Si possono fare ora delle osservazioni importanti sulla determinazione della costante: a tal oggetto risolviamo lo stesso problema, prendendo la parabola, la cui equazione sia

$$y^2=m+nx \dots (71)$$

Quì l'origine delle ascisse non è più al vertice della curva, poichè facendo $y=o$, l' equazione (71) da $x=-\frac{m}{n}$, e come quest'ascipa deve estendersi fino al punto B, ove si ha $y=o$ si prenderà $Ba=\frac{m}{n}$, el punto a sarà l'origine. Ciò posto, operando come nel caso precedente, si troverà

Fig. 21

$2y\mathrm{d}y=n\mathrm{d}x$; e perciò $y\mathrm{d}x=\frac{2y^2}{n}\mathrm{d}y$, e

$$\int y\mathrm{d}x=\frac{2y^3}{3n}+C\ .\ .\ .\ (72).$$

Per determinar la costante, osservisi che la superficie $abb'p'$, che quì rappresenta l' integrale dee esser nulla, quando l' ordinata $p'b'$ coincide con ab; or essendo ab l' ordinata che passa per l' origine a, in cui è l' ascipa $x=o$ l'equazione (71) ci darà in questa ipotesi $y=ab=\sqrt{m}$; facendo dunque

$\int y dx = 0$ ed $y = \sqrt{m}$, l' equazione (72)

diverrà $0 = \frac{2m^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$, dalla quale se ne deduce $C = -\frac{2m^{\frac{3}{2}}}{3n}$, e perciò l' integrale cercato è

$$\int y dx = \frac{2y^3}{3n} - \frac{2m^{\frac{3}{2}}}{3n} = \text{aja } abb'p'$$

353. Negli esempii precedenti abbiamo dall' equazione della curva ricavato il valore di dx per sostituirlo nella formola ydx, ed in seguito integrare. Avremmo potuto operare altrimenti, sostituendo in questa espressione piuttosto il valore di y, che quello di dx: poichè, per ottener l' integrale, basta che il proposto differenziale non contenga che una variabile; perciò si sceglierà la sostituzione che esige meno calcolo.

354. Un integrale come $\int fx.dx$ può sempre rappresentare l' aja di una curva, la cui equazione fosse $y = fx$: infatti data questa equazione, se si sostituisca il valore di y nella formola $\int y dx$, si avrà $\int fx.dx$ per l' espressione della superficie di questa curva. Da ciò deriva, che quando un problema ci conduce ad integrare una funzione di una sola variabile, si dice che tal problema siasi ridotto alle quadrature.

355. Sia X una funzione di x, e supponiamo che integrando Xdx siasi ottenuto

$$\int X dx = Fx + C \ldots . (73));$$

questo integrale, nel quale la costante C non è ancora determinata porta il nome *d'integrale indefinito generale*, o più semplicemente, *d'integrale indefinito*, ed esso sarà compiuto, quando racchiude la costante arbitraria C.

356. Se, dietro un' ipotesi, questa costante C si determina, come se si suppone per esempio, che $\int X dx$ debba svanire, quando è $x = a$, l' equazione (73) da in questo caso $0 = Fa + C$, sicchè sarà $C = -Fa$, e l' equazione (73) diverrà

$$\int X dx = Fx - Fa;$$

questo integrale $Fx - Fa$ è allora un integrale particolare, e si vede che il numero degli integrali particolari di una espressione differenziale è indeterminato, poicchè si possono fare infinite ipotesi differenti sulla costante.

357. Quando si suppone nullo l' integrale dietro l'ipotesi di $x = a$, è lo stesso di stabilire, che prendendo (Fig. 21) un' ascissa eguale ad A$a = a$, la superficie sia compresa tra il limite ab, e l' altro indefinito $p'b' = x$, dunque l' operazione, per mezzo della quale determiniamo un integrale particolare, equivale a quella di fissare la posizione del limite ab dal quale si computa l' integrale. Il secondo limite $p'b'$ sarà anche fissato invariabilmente, se diamo ad x un valore determinato b; allora l' integrale particolare $Fx - Fa$ diverrà

$\int y\mathrm{d}x = \mathrm{F}b - \mathrm{F}a \ldots (74)$;
e la superficie $abb'p'$ non sarà più arbitraria. In questo caso l' integrale porta il nome *d' integrale definito* , e si dice ch' esso è preso da $x=a$ fino ad $x=b$.

358. Cerchiamo ora l' integrale definito di $x^{\mathrm{m}}\mathrm{d}x$; ciò suppone la conoscenza di due valori $x=a$, $x=b$, che soddisfano l' integrale indefinito .

$$\frac{x^{\mathrm{m}+1}}{m+1} + \mathrm{C} \ldots (75).$$

Supponiamo che il primo corrisponda a $\int y\mathrm{d}x = 0$; si avrà

$$\frac{a^{\mathrm{m}+1}}{m+1} + \mathrm{C} = 0;$$

e l' integrale particolare sarà

$$\int x^{\mathrm{m}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mathrm{m}+1}}{m+1} - \frac{a^{\mathrm{m}+1}}{m+1}$$

Faremo in seguito $x=b$, ed avremo per l' integrale definito

$$\int x^{\mathrm{m}}\mathrm{d}x = \frac{b^{\mathrm{m}+1}}{m+1} - \frac{a^{\mathrm{m}+1}}{m+1}.$$

359. Si perviene ancora allo stesso integrale , facendo successivamente $x=a$, $x=b$ coll' integrale indefinito ; si avrà

$$\frac{a^{\mathrm{m}+1}}{m+1} + \mathrm{C} \text{ e } \frac{b^{\mathrm{m}+1}}{m+1} + \mathrm{C};$$

in seguito si toglierà dal secondo il primo

risultamento; ma nel prendere questa differenza bisogna sempre badare, che la parte sottratta sia il valore della funzione di x all' origine dell' integrale.

560. Per terza applicazione determiniamo Fig. 10 l' aja di un triangolo rettangolo ADC (Fig 10). L' equazione della retta DC sia $y = ax$; mettendo questo valore di y nella formola $y\mathrm{d}x$, si ha $ax\mathrm{d}x$; sicchè sarà

$$\int y\mathrm{d}x = \int ax\mathrm{d}x = \frac{ax^2}{2} + \mathrm{C}.$$

Essendo nulla la superficie, quando $x = 0$, la costante è zero, sicchè sarà

$$aja\ \mathrm{DAC} = \frac{ax^2}{2} = \frac{x}{2}.ax = \frac{xy}{2}.$$

561. Se nella formola $y\mathrm{d}x$ si mette il valore di y, tirato dall' equazione del cerchio si troverà $\int \mathrm{d}x\sqrt{a^2 - x^2}$ per l' espressione dell' aja del cerchio. Or abbiamo veduto (art. 282), che il valore di questo integrale era

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \mathrm{arc}\left(\mathrm{sen} = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}.$$

La parte $\frac{1}{2}a^2\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen} = \frac{x}{a}\right)$ non potendo essere determinata, che nell' ipotesi in cui sia noto il rapporto del diametro alla circonferenza (*), si vede che l' integrazione di $\mathrm{d}x\sqrt{a^2 - x^2}$

(*) *Se per esempio è* $x = \frac{1}{6}a$ *si ha* $\frac{x}{a} = \frac{1}{6}$,

non può condurre alla soluzione del problema della qnadratura del cerchio. Lo stesso dee dirsi della quadratura dell' Ellisse, che dipende da $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}$.

Se queste due espressioni si paragonino, se ne tirerà la proporzione *aja ellittica : aja circolare* $=\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}:\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}:1$ da cui si tira

$$aja\ ellittica=\frac{b}{a}.\ aja\ circolare=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab$$

Della rettificazione delle curve.

562 Rettificare una curva, è lo stesso che esibire una retta eguale ad un arco di curva Abbiamo trovato (art. 159) che l' espressione del differenziale di un arco di curva era

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}\ .\ .\ .\ .\ (76):$$

Or quando è data una equazione tra due variabili x ed y, se si vuole rettificare una curva, alla quale essa appartiene, si differenzierà questa equazione, e se ne tirerà il valore di dx, e dy, che si sostituirà nell' espressione (76); allora il radicale non conterrà più che una sola variabile, e se si può

---

e si opererà come nell' art. 278 per determinare l' arco corrispondente.

ottenere l' integrale, la curva sarà rettificabile.

Prendiamo per esempio una curva la cui equazione è $y^3 = nx^2$ (*), trovata nell' art. 165: differenziando questa equazione si otterrà.

$$3y^2 dy = 2nx dx$$

d'onde si tirerà

$$dx = \frac{3y^2 dy}{2nx}, \text{ e } dx^2 = \frac{9y^4 dy^2}{4nx^2}$$

$$= \frac{9y^4}{4ny^3} dy^2 = \frac{9y}{4n} dy^2;$$

sostituendo si ha

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{9y}{4n} + 1\right)} dy$$

(*) *Essa porta il nome di seconda parabola cubica. Questa equazione, come quella della parabola ordinaria non sono che casi particolari dell' equazione generale* $y^m = ax^n$: *ecco perchè questa equazione vien conosciuta sotto il nome di* equazione della parabola di tutti gli ordini. *L' equazione* $xy = a$ *dell' iperbole tra gli asintoti si è anche riguardata come un caso particolare dell' equazione* $x^m y^n = a^{m+n}$, *che per tal ragione vien detta* l' equazione dell' iperbole di tutti gli ordini.

$$= dy\sqrt{\frac{9y}{4n} + 1};$$

essendo dy il differenziale dell' espressione ch' è sotto il radicale, a meno di una costante, si farà (art. 271) $\frac{9y}{4n} + 1 = z$ da cui si tira $dy = \frac{4n}{9}dz$; sostituendo, avremo

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} z^{\frac{1}{2}} dz;$$

sicchè sarà

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} \cdot \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{8n}{27} z^{\frac{3}{2}} + C;$$

o, rimettendo il valore di z

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8n}{27}\left(\frac{9y}{4n} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Per determinare la costante, dietro la natura dell' equazione della curva, si vede, che all' origine delle ascisse y è o: perciò, supponendo che l' integrale sia nullo in questo punto, si ha

$$o = \frac{8n}{27} + C, \text{ dunque } C = -\frac{8n}{27};$$

e perciò

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2(2a)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} C$$

$$= -2\sqrt{2az} + C;$$

o, rimettendo il valore di y

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2\sqrt{2a(2a-y)} + C \ldots (77)$$

Per determinare la costante, prenderemo l'integrale, in modo che svanisca quando è $y=2a$; con questa supposizione l'equazione (77) si ridurrà a $0=0+C$, ciocchè mostra, che non vi è costante d'aggiungervi; in tal caso l'arco della cicloide si estenderà (Fig. 18) dal punto D' in cui è $y=2a$, fino al punto N' le cui coordinate sono x, ed y. Il valore assoluto dell'arco N'D' essendo $2\sqrt{2a(2a-y)}$, osserveremo che $D'E = 2a-y$; sicchè sarà $2\sqrt{2a(2a-y)} = 2\sqrt{D'D.D'E} = 2D'F$; d'onde segue che l'arco N'D' della cicloide è eguale al doppio della corda D'F'; perciò sarà arc $HD' = 2D'D$. **.

Della determinazione della superficie de' solidi di rivoluzione.

365. Se una curva bM (Fig. 21) descritta su di un piano, fa una rivoluzione intorno all'asse AX, descriverà un solido di rivoluzione. Audiamo a trovare il differenziale della superficie generata da questa curva. A tale oggetto siano $Ba=x$, $ab=y$, $ap'=h$; sarà

Fig. 21

$$ab = fx = y$$

ta dal movimento di rotazione dell' arco bb', e con s quest' arco della curva; poichè quest' arco tende a confondersi colla sua corda, a proporzione che diminuisce; nel caso del limite, il primo membro dell' equazione precedente diverrà $\frac{du}{ds}$; el secondo si ridurrà a $2\pi y$; perciò si avrà

$$\frac{du}{ds} = 2\pi y;$$

e perciò $du = 2\pi y ds$; sostituendo a ds il suo valore trovato (art. 159), si avrà in fine

$$du = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

366. Col metodo degl' infinitamente piccoli si sarebbe considerato l'elemento della superficie di rivoluzione, come quello di un cono tronco generato dalla rotazione del trapezio elementare $bap'b'$ intorno ed AX; questo cono tronco avrebbe per espressione

$$\text{cir.}\left(\frac{ab + p'b'}{2}\right).bb' = \pi(2y + dy)ds$$

$$= 2\pi y ds + \pi dy ds;$$

sopprimendo il termine $\pi dy ds$, come infinitamente piccolo di second' ordine, resterebbe

elemento di una superficie di rivoluzione

$$= 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

367 Per farne una prima applicazione, prendiamo la superficie del paraboloide di rivo-

luzione, ch' è il solido generato dalla rivo-
Fig. 22 luzione di un arco AP (Fig. 22) di parabola, intorno al suo asse. L' equazione della parabola $y^2 = px$ da

$$dx = \frac{2ydy}{p}, \quad dx^2 \frac{4y^2dy^2}{p^2}.$$

Questo valore sostituito nella formola $2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$ la riduce a

$$2\pi y \sqrt{\frac{(4y^2 + p^2)}{p^2}dy^2} = \frac{2\pi}{p} ydy\sqrt{4y^2 + p^2}:$$

essendo ydy il differenziale della quantità sotto il segno radicale, a meno di una costante, si farà (art. 271) $4y^2 + p^2 = z$; differenziando si troverà $ydy = \frac{dz}{8}$; sostituendo ed integrando, si avrà

$$\int \frac{2\pi}{p} ydy\sqrt{4y^2 + p^2} = \int \frac{\pi}{4p} z^{\frac{1}{2}}dz$$

$$= \frac{\pi}{6} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{p} + C = \frac{\pi}{6p}(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Si determini la costante nell' ipotesi che l' integrale sia nullo, allorchè è $y = 0$; l' equazione precedente diverrà

$$0 = \frac{\pi}{6}p^2 + C, \text{ ciocchè da } C = -\frac{\pi}{6}p^2;$$

e supponendo che l' integrale sia preso da

$y = 0$ fino ad $y = b$, l' integrale definito sarà

$$\frac{\pi}{6p}\left[(4b^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right].$$

368. Per seconda applicazione, valutiamo la superficie della sfera. Questa essendo generata dalla rivoluzione della semicirconferenza intorno al suo diametro, sia $x^2 + y^2 = a^2$ *l' equazione del cerchio*; differenziando si ha

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0;$$

sicchè sarà

$$\mathrm{d}y = -\frac{x\mathrm{d}x}{y}, \text{ e } \mathrm{d}y^2 = \frac{x^2\mathrm{d}x^2}{y^2};$$

sostituendo questo valore alla formola (78), otterremo

$$2\pi y\sqrt{\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)\mathrm{d}x^2} = \int 2\pi\mathrm{d}x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \int 2\pi a\mathrm{d}x = 2\pi ax + C \;.\;. \;(79)$$

Per determinare la costante, prenderemo l' integrale a partire dal punto A (Fig. 22), e poichè l' origine delle coordinate è al centro, supporremo l' integrale nullo, quanto è $x = a$: questa ipotesi ridurrà l' equazione (79) a

Fig. 22

$$0 = -2\pi a^2 + C; \text{ sicchè sarà } C = 2\pi a^2;$$

sostituendo questo valore nell' equazione (79), avremo

$$\int 2\pi a\mathrm{d}x = 2\pi(ax + a^2).$$

Prendiamo ora l' integrale definito tra' limiti

$x = -a$, $x = a$; bisognerà cambiare x in a nella formola precedente, e si otterrà
superficie della sfera $= \int 2\pi a dx = 2\pi(a^2 + a^2)$
$= 2\pi(2a^2) = 4\pi a^2$.

569. Si può ancora trovare la superficie del cilindro retto, poichè, essendo questa generata dalla rivoluzione del rettangolo AEOB (Fig. 22) eseguita intorno all' asse AB, siano BA $= a$, AE $= b$; allora l' equazione della retta EO sarà $y = b$, e perciò si avrà $dy = 0$; sostituendo questi valori nella formola (78), essa riducesi a $2\pi b dx$, ed integrando si ha

Fig. 22

$$\int 2\pi b dx = 2\pi b x + C.$$

Se si prende l' integrale definito tra' limiti $x = 0$, ed $x = a$, si troverà
superficie del cilindro $= 2\pi ba = 2\pi b.a =$ *circonferenza della base . per l' altezza.*
Per riguardo alla superficie del cono, essendo questo solido generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo DCA (Fig. 10) intorno l' asse DA, siano DA $= a$, AC $= b$; allora l' equazione di DC sarà $y = \frac{b}{a} x$; questa equazione differenziata da

Fig. 10

$$dy = \frac{b}{a} dx, \text{ e } dy^2 = \frac{b^2}{a^2} dx^2:$$

sostituendo nella formola (78) i valori di y, e di dy^2, si ha

$$\int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int 2\pi \frac{bx}{a^2} dx \sqrt{a^2 + b^2}$$

$= \pi \dfrac{bx^2}{a^2} \sqrt{a^2+b^2} + C$: e prendendo l' integrale definito tra' limiti $x=0; x=a$, si ha

superficie del cono $= \pi b\sqrt{a^2+b^2} = 2\pi b.\dfrac{DC}{2}$

$= circonferenza\ .CA.\dfrac{DC}{2}$

Della cubatura de' solidi di rivoluzione.

570. Sia v il volume generato dalla rivoluzione dell' aja mistilinea $abb'p'$ intorno all' asse AX (Fig. 21): se l' ascissa $ap'=x$ diviene $ap''=x+h$; il solido di rivoluzione crescerà di quanto è il corpo generato dalla rotazione del trapezio mistilineo $p'b'b''p''$ intorno dello stesso asse. Or poichè il volume generato da $abb'p'$ è una funzione di x, poichè esso aumenta e diminuisce, come cresce o diminuisce x, ne segue che il volume generato da $abb''p''$ sarà una funzione di $x+h$, e per conseguenza esso avrà per espressione

Fig. 21

$$v + \frac{dv}{dx}h + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{ec.};$$

sicchè, toltone il volume generato da $abb'p'$, che abbiamo indicato con v, si avrà

volume generato da $p'b'b''p'' =$

$$\frac{dv}{dx}h+\frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2}+ec.$$

Or essendo questo volume compreso tra' cilindri generati da rettangoli $p'b''$, $p''b'$, differirà da uno di questi cilindri meno di quello che i cilindri non differiscono tra loro; sicchè, se si può dimostrare, che il rapporto di questi cilindri è l'unità nell'ipotesi del limite, lo sarà a più forte ragione quello del corpo descritto da $p'b'b''p''$ ad uno di questi cilindri. Ciò posto si ha evidentemente

cilindro descritto da $p'b''=\pi[f(x+h)]^2h$;

cilindro descritto da $p''b'=\pi(fx)^2h$;

sicchè il rapporto di questi cilindri è

$$\frac{[f(x+h)]^2}{(fx)^2};$$

facendo $h=o$, si vede che questo rapporto riducesi all' unità; dunque lo stesso avverrà del rapporto del volume generato da $p'b'b''p''$ a quello del cilindro generato da $p''b'$.

Or questo rapporto è rappresentato da

$$\frac{\frac{dv}{dx}h+\frac{d^2v}{dx}\cdot\frac{h^2}{2}+ec.}{\pi(fx)^2h}=\frac{\frac{dv}{dx}+\frac{d^2v}{dx^2}\frac{h}{2}+ec.}{\pi(fx)^2};$$

sicchè nell'ipotesi del limite si avrà

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\pi(fx)^2}=1;$$

da cui si tira $\frac{dv}{dx}=\pi(fx)^2=\pi y^2$;

ed in fine $dv=\pi y^2 dx$ . . . (80)

571. Si perverrebbe allo stesso risultamento per mezzo della considerazione degl'infinitemente piccoli, poichè il volume MON (Fig. 24) può esser considerato come diviso in istrati di un volume infinitesimo per mezzo di piani perpendicolari all' asse di rivoluzione: uno di questi, ch' è l' elemento del corpo, può esser considerato come un cilindro, la cui base è il cerchio descritto da y, e che ha per altezza la spessezza ab rappresentata da dx; perciò questo elemento ha per espressione $\pi y^2 dx$

Fig. 4

572. Applichiamo questa formola alla determinazione del volume dell' ellittoide allungato, che vien generato dalla rivoluzione dell' ellisse intorno al suo asse maggiore. E poichè l' equazione dell' ellisse riferita al centro preso per origine è $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; bisognerà sostituire questo valore di y^2 nella formola $\pi y^2 dx$, e si avrà

$$\pi y^2 dx=\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx\,;$$

integrando si troverà

$$\int\pi y^2 dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)+C\ .\ .\ .(81).$$

Supponiamo che l' integrale sia nullo al punto A, (Fig. 22), ove è $x = -a$, si avrà

Fig. 22

$$C = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3;$$

sostituendo questo valore di C, l' equazione (81) diverrà

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} a^3 \right):$$

Facciamo in seguito $x = a$, per aver l' integrale definito compreso tra' limiti $x = a$, $x = -a$; si otterrà

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3.$$

Questo sarà il volume dell' ellittoide allungato. Se $b = a$, questo volume diverrà quello della sfera, ed avrà per espressione

$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^2 . 2a = \frac{2}{3}$ *del cilindro circoscritto*

Determiniamo ancora il volume del paraboloide di rivoluzione. A tal oggetto, prendiamo per generetrice la parabola di tutti gli ordini; l' equazione di questa ci darà

$$y = a x^{\frac{n}{m}};$$

sostituendo questo valore nella formola (80), otterremo

$$v = \int \pi a^2 x^{\frac{2n}{m}} dx = \frac{m \pi a^2 x^{\frac{2n+m}{m}}}{2n + m} + C.$$

Per determinare la costante, supporremo che il volume sia nullo all' origine, ov' è $x=0$: allora avremo $C=0$. Nel caso della parabola ordinaria, si ha $m=2$, $n=1$, sicchè

$$v=\pi a^2\frac{x^2}{2}=\pi a^2 x\frac{x}{2}=\pi y^2.\frac{x}{2}.$$

Or essendo πy^2 là superficie del cerchio, il cui raggio è PM, l'espressione $\frac{1}{2}\pi y^2.x$ rappresenta la metà del cilindro descritto da BPMP' che gira intorno l'asse delle ascisse: sicchè il volume della parabola ordinaria è la metà di quello del cilindro circoscritto (*Nota quinta*)

Fig. 21

Della cubatura de' corpi terminati da superficie curve, per mezzo d' integrali doppii.

** 373. Proponiamoci di determinare l'espressione del differenziale di un volume terminato da una superficie la cui equazione è data. Sia EDCB (Fig. 44) un volume compreso nell' angolo degli assi coordinati Ax, Ay, Az, e terminato da un piano DGC paralelo a quello delle yz; se x diviene $x+h$, questo volume si aumenterà di uno strato, la cui spessezza sarà h; e chiamando V' ciocchè allora diviene il volume si avrà

Fig. 44

$$V'=V+\frac{dV}{dx}h+\frac{d^2V}{dx^2}.\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3V}{dx^3}.\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec};$$

e lo strato DD'CC'FG sarà rappresentato da

$$V' - V = \frac{dV}{dx}h + \frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3V}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \&c$$

nel caso del limite, questa equazione ci da

$$\frac{V' - V}{h} = \frac{dV}{dx} \quad . \; . \; . \; (81).$$

Abbiamo già fatto conoscere i due metodi de' limiti, e degl' infinitamente piccoli, cosicchè non temiamo di offendere il rigore matematico, se impiegheremo quì delle considerazioni tratte da quest' ultimo, onde mettere più in chetro questa materia; in seguito si potrà senza difficoltà ritornare al metodo de' limiti.

L'equazione (81) ci mostra che $\frac{dV}{dx}$ è il coefficiente differenziale, che determina il volume; perciò il differenziale è $\frac{dV}{dx}dx$; questo differale non è altro che uno strato infinitamente sottile DD'CC'FG, la cui spessezza è dx. Se in questo strato si fa variare y, esso diverrebbe infinitamente sottile nel senso delle y, come lo è già in quello delle x, e perciò esso si ridurrà ad un piccolo prisma elementare ID'KF, la cui altezza sarà z, e che avrà per base FGKL $= dxdy$; sicchè si avrà

$$\frac{d^2V}{dxdy}\,dxdy = zdxdy$$

equazione, che darà

$$\frac{d^2V}{dxdy} = z:$$

sostituendo a z il suo valore tirato dall' equazione della curva, questo sarà in generale una funzione di x, e di y, che rappresenteremo con M, ed avremo

$$\frac{d^2V}{dxdy} = M.$$

374. Per determinare il volume, per mezzo di questa espressione, scriviamola così

$$\frac{d\frac{dV}{dx}}{dy}\,dy = Mdy\,;$$

La notazione del primo membro di questa equazione ci mostra che si è giunto all' espressione del differenziale di $\frac{dV}{dx}$, riguardando y come variabile, ed x come costante; sicchè la stessa ipotesi dovrà aver luogo allorchè per una operazione inversa integreremo; ma allora x trattata come costante potrà far parte della costante che si dee aggiungere all' integrale. Sicchè riguarderemo in generale questa costante come funzione di x: rappresentandola con X, avremo per mezzo di una prima integrazione

$$\frac{dV}{dx} = \int Mdy + X \;.\;.\;.\; (82).$$

Per eseguire la seconda integrazione, osserveremo, che la notazione $\frac{dV}{dx}$ mostra che il dif-

ferenziale del volume debba esser preso riguardando x come la sola variabile; dobbiamo dunque conservare la stessa ipotesi nell' integrazione; perciò rappresentando con Y la funzione di y, che rimpiazzerà la costante; e moltiplicando preliminarmente per dx per cambiare il coefficiente differenziale in differenziale troveremo

$$V = \int dx(\int M dy + X) + Y.$$

375. Essendo arbitrario l' ordine delle integrazioni, possiamo indicare nel seguente modo le operazioni fatte

$$V = \int\int z dy dx \quad . \; . \; . \; (83).$$

376. Per dare un' applicazione di questo metodo, proponiamoci di trovare il volume della sfera, la cui equazione sia

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2:$$

da questa equazione si tirerà il valore di z, che sostituito nella formola (83) darà

$$\int\int z dx dy \text{, o } \int dy \int z dx$$

$$= \int dy \int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad . \; . \; . \; (84)$$

riguardando y come costante, ed indicando con A^2 la differenza $r^2 - y^2$, ch' è essenzialmente positiva, poichè r è sempre maggiore di y, troveremo primieramente integrando per rapporto ad x

$$\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \int dx \sqrt{A^2 - x^2};$$

or, da ciocchè si è detto nell' art. 282, si ha

$$\int dx \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$+\frac{1}{2}A^2\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{x}{A}\right)+Y;$$

e mettendo il valore di A^2, si trova

$$\int dx\sqrt{r^2-x^2-y^2}=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

$$+\frac{1}{2}(r^2-y^2)\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)+Y.... \quad (85).$$

Per prendere l' integrale definito, osserviamo, ch' essendo la costante y rappresentata da AP (Fig. 45), tutt' i punti, che andiamo a determinare per mezzo di questo integrale, debbono avere le loro projezioni sulla direzione di PM; poichè uno di questi punti a piacere avendo la variabile z per ordinata; avrà AQ, e QN per le altre due coordinate, ed allora QN sarà eguale alla costante AP, e l' altra coordinata AQ diretta nel senso di x potrà essere rimpiazzata da PN; di sortachè contando le x sulla retta PM, le y saranno costanti; prendendo dunque l' integrale da P fino ad M, cioè da $x=0$ fino ad $x=PM$ $=\sqrt{r^2-y^2}$; sostituiremo successivamente ad x nel secondo membro dell' equazione (85) i valori $x=\sqrt{r^2-y^2}$, $x=0$; e togliendo il secondo risultamento dal primo, troveremo

Fig. 45

$$\textit{integrale definito}=\frac{1}{2}(r^2-y^2)\text{arc}(\text{sen}=1);$$

ed osservando che l'arco, il cui seno è 1, è

il quadrante rappresentato, secondo l'uso, da $\frac{\pi}{2}$, si avrà

$$integrale\ definito = \frac{1}{2}(r^2 - y^2).\ \frac{\pi}{2};$$

sostituito questo valore di $\int dx\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ nell'equazione (84), si avrà

$$\int\int z dx dy = \frac{1}{4}\pi\int(r^2 - y^2)dy.$$

$$= \frac{1}{4}\pi\left(r^2y - \frac{y^3}{3}\right) + X;$$

ed integrando da $y = 0$ fino ad $y = r$, si troverà

$$\int\int z dx dy = \frac{\pi}{4}\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2\pi r^3}{12} = \frac{1}{6}\pi r^3;$$

Tale sarà il volume, che poggerà sul quarto di cerchio ABC, e che sarà perciò l'ottava parte della sfera (*Nota quarta*)

Della quadratura delle superficie curve, per mezzo degl' integrali doppii.

377.** Sia (Fig. 44) EDCB = S una superficie curva, e supponiamo che l'ascissa x si aumenti di h; questa superficie diverrà

$$S + \frac{dS}{dx}h + \frac{d^2S}{dx^2}\frac{h^2}{2} + ec;$$

e nel caso del limite il rapporto dell' accrescimento della funzione S a quello dalla variabile x si ridurrà a $\frac{dS}{dx}$; d'onde si conchiuderà che il differenziale è $\frac{dS}{dx}dx$: questo differenziale sarà rappresentato nella figura dalla zona DD′CC′ di una larghezza infinitamente piccola. Se in DD′CC′ si fa ora variare y, e che y divenga ancora infinitamente piccolo; la zona DD′CC′ si ridurrà à DD′II′, ed avrà per espressione.

$$\frac{d^2S}{dxdy}\,dxdy:$$

Or la superficie DD′II′ essendo infinitamente piccola, può esser considerata come piana; perciò moltiplicandola pel coseno della sua inclinazione γ sul piano delle xy, essa eguaglierà $dxdy$ (*nota quinta*); sicchè avremo

$$DD'I'I\cos\gamma = dxdy;$$

o

$$\frac{d^2S}{dxdy}dxdy\cos\gamma = dxdy;$$

da cui si tirerà

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Per determinare il valore di γ, sia $Ax + By + Cz + D = 0$ l'equazione del piano tangente: sappiamo che questo piano fa con quello delle xy un angolo dato dall'equazione (*nota sesta*)

*

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

Sicchè se consideriamo $Ax + By + Cz + B = 0$ come l'equazione del piano tangente al punto della superficie curva, la cui projezione è $dxdy$, avremo

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad \ldots (86).$$

Per determinare i coefficienti differenziali, che entrano in questa espressione, osserveremo, che nel punto che consideriamo, il piano tangente si confonde colla superficie curva, di cui ne rappresenteremo l'equazione con $z = f(x, y)$; perciò i valori di $\frac{dz}{dx}$, e di $\frac{dz}{dy}$, che entrano nell' espressione $\cos\gamma$ debbono essere riguardati (art. 75), come gli stessi di quelli, che si dedurrebbero immediatamente dall' equazione $z = f(x, y)$ Sicchè dopo aver fatte queste sostituzioni, s' integrerà due volte l'equazione (86) moltiplicata per $dxdy$, operazione che indicheremo, come precedentemente, con un doppio segno d' integrazione, ed avremo

$$S = \iint dxdy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

378. Per dare un applicazione di questa formola, cerchiamo di determinare l' espres-

sione della superficie della sfera. Sia la sua equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ . \ . \ . \ (87);$$

differenziandola, e dividendo per 2, si avrà

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0,$$

dalla quale si tirerà

$$\mathrm{d}z = -\frac{x}{z}\mathrm{d}x - \frac{y}{z}\mathrm{d}y;$$

perciò sarà

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{z}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{y}{z}:$$

Sostituendo questi valori nell'espressione $\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, questa diverrà

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r}{z},$$

e perciò avremo

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$
$$= \iint \frac{r\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z};$$

mettendo il valore di z, si avrà

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

$$=\iint\frac{r\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

379. Per fare le integrazioni indicate, scriveremo

$$\iint\frac{r\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int r\mathrm{d}y\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\ldots(88)$$ e

ed osserveremo con ciò, che dobbiamo cominciare per integrare l' espressione $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$; considerando x come la sola variabile; facendo dunque, come quì sopra

$$r^2-y^2=A^2,$$

ed integrando, dietro l' art. 274, avremo, dopo di aver aggiunto una costante funzione di y

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2-x^2}}=\text{arc.sen}\frac{x}{a}+Y;$$

sostituendo ad A il suo valore, e prendendo in seguito l' integrale definito da $x=0$ fino ad $x=\sqrt{r^2-y^2}$, ne verrà

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\text{arc}(\text{sen}=1)=\frac{1}{4}\ \textit{circonfe-}$$

renza $=\frac{\pi}{2}$: questo valore sostitnito nell' equazione (88), ci darà

$$\iint\frac{r\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int\frac{\pi}{2}r\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi ry+X;$$

chiamando X la costante, che dee riguardarsi come funzione di x; in seguito prendendo l'integrale definito tra' limiti $y=0, y=r$, troveremo infine

$$\iint \frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = \frac{1}{2}\pi r^2:$$

Questa sarà la parte della superficie sferica compresa nell'angolo formato dagli assi coordinati rettangolari x, y, z, cioè l'ottava parte della superficie sferica **

Dell' integrazione delle funzioni di due variabili

580. I due metodi principali, che s' impiegano per giungere ad integrare l'equazioni differenziali, le quali contengono due, o un maggior numero di variabili, consistono 1° nella separazione delle variabili, per poter in seguito loro applicare i metodi usati per una sola variabile; 2° nella ricerca de' fattori proprii a rendere un differenziale esatto. Ecco perchè ci andremo ad occupare successivamente di questi due metodi.

Della separazione delle variabili; dell' equazione lineare di prim' ordine, e delle proprietà delle funzioni omogenee.

581. Abbiamo veduto che ogni differenziale, per essere integrabile, dovea essere della forma $\phi x\,dx$: perciò si troverebbero de-

gli ostacoli nell' integrazione di una equazione, se essa racchiudesse de termini, come y^2dx, $xydx$, $\frac{dx}{y}$ ecc. Intanto non si potrebbe conchiudere, che l'integrazione non è praticabile, poichè se, per mezzo di operazioni algebriche, potesse ridursi ogni termine a non contenere, che una sola variabile, l' integrazione potrebbe formarsi in seguito. L'equazione $xdy + ydx = 0$ è in questo caso: infatti se questa equazione dividesi per xy, essa diviene

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0;$$

ed integrando essa da

$$\log x + \log y = C,$$

e rappresentando con A il numero, il cui logaritmo è C, si avrà

$$\log y + \log x = \log A;$$

e perciò

$$\log xy = \log A;$$

passando a' numeri si ha

$$xy = A$$

382 Sia l' equazione più generale

$$\varphi x dy + F y dx = 0:$$

per separare le variabili, questa equazione si dividerà per $\varphi x F y$, e si otterrà

$$\frac{dy}{Fy} + \frac{dx}{\varphi x} = 0,$$

equazione, nella quale le variabili sono separate

583. Per darne un esempio, proponiamoci d' integrare

$$(1+x^2)\,dy = dx\sqrt{y}:$$

dividendo per $(1+x^2)\sqrt{y}$, si avrà

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1+x^2};$$

ed integrando questa equazione, si avrà

$$2\sqrt{y} = \text{arc.tang}x + C.$$

584 Le variabili potrebbero anche separarsi per mezzo della divisione nella formola

$$\phi x.Fy.dx + \phi' x.F'y.dy = 0;$$

a tale oggetto, basterebbe dividere per $Fy\phi' x$ e si avrebbe

$$\frac{\phi x}{\phi' x}\,dx = \frac{F'y}{Fy}\,dy = 0.$$

Questo metodo è applicabile all' equazione

$$x^2y dx + (3y+1)dy\sqrt{x^3} = 0;$$

poichè se si divide per $y\sqrt{x^3}$, si avrà

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}\,dx + \left(\frac{3y+1}{y}\right)dy = 0.$$

585. L' integrazione potrebbe ancora effettuirsi, se l' equazione proposta racchiudesse più di due variabili, e che si potesse ridurla a non contenere in ogni membro, che de'

differenziali, l' integrale de' quali è noto, come sarebbero, per esempio, le funzioni

$$\frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad xdy + ydx, \text{ ecc.}$$

le quali hanno rispettivamente per integrali $\frac{x}{y}$, ed xy.

586. Vi è un equazione importante, nella quale la separazione delle variabili si ottiene con un metodo ingegnosissimo; essa è la seguente

$$dy + Pydx = Qdx = \ldots (89).$$

nelle quali P e Q sono funzioni di x.

A tale oggetto si farà y eguale al prodotto delle due indeterminate X, e z, ciocchè darà

$$y = zX, \quad dy = zdX + Xdz;$$

sostituendo questi valori nell' equazione (89), si trasformerà in

$$zdX + X(dz + Pzdx) = Qdx.$$

Essendo X arbitraria, questa funzione si determinerà, eguagliando tra loro i termini che non sono sotto la parentesi, ciocchè decomporrà l' equazione precedente in queste due altre

$$X(dz + Pzdx) = 0, \quad zdX = Qdx;$$

la prima da

$$\frac{dz}{z} = -Pdx, \text{ o } \log z = -\int Pdx;$$

o, osservando che $\log e = 1$,

$$\log z = -\int P dx \log e = \log e^{-\int P dx};$$

passando ai numeri, si ha

$$z = e^{-\int P dx}:$$

dalla seconda equazione si tira

$$dX = \frac{Q dx}{z} = Q e^{\int P dx} dx;$$

sicchè sarà

$$X = \int Q e^{\int P dx} dx + C;$$

questi valori di z, e di X, messi nell' equazione

$$y = zX$$

la trasformano in

$$y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + C\right) \ . \ . \ . \ (90).$$

Questa equazione porta il nome di *equazione lineare di prim' ordine*; ne vedremo la ragione nell' art. 442

387. La separazione delle variabili può sempre farsi nell' equazioni differenziali del primo ordine a due variabili, quando esse sono omogenee. Un' equazione omogenea è quella nella quale tutt' i termini considerati per rapporto alle variabili, hanno la stessa dimensione: così l' equazione

$$ax^2y^3 + bxy^4 + cy^3x^2 = 0$$

è un' equazione omogenea, poichè essendo la somma degli esponenti di x ed y in ogni

termine, eguale a 5, tutt' i prodotti x^2y^3, xy^4, ec., sono ciascheduno di cinque dimensioni

L' equazione

$$ax^6y^2 - bx^3y^5 + cy^8 = 0$$

è anche omogenea, poicchè la somma degli esponenti delle variabili in ogni termine è 8. La variabile x non entra nell' ultimo termine dell' equazione, ma può essere considerata come elevata alla potenza zero

388. Sia, in generale, z una funzione di x, e di y composta di termini omogenei, come Ax^py^q, $Bx^{p'}y^{q'}$, $Cx^{p''}y^{q''}$, ec. Se indicheremo con n la somma degli esponenti di x, ed y, in uno di questi termini, in virtù dell' omogeneità, avremo

$$p + q = n\,,\ p' + q' = n\,,\ p'' + q'' = n \text{ ec.}$$

Ciò posto, se dividiamo tutt' i termini per x^n, l' egualità sussisterà ancora, el termine Ax^py^q diverrà

$$\frac{Ax^py^q}{x^1} = \frac{Ay^q}{x^{1-p}} = \frac{Ay^q}{x^q} = A\left(\frac{y}{x}\right)^q;$$

ciocchè dicesi di questo termine, potendo applicarsi a tutti gli altri, avremo

$$\frac{z}{x^n} = F\left(\frac{y}{x}\right);$$

e facendo $\frac{y}{x} = q$, questa equazione diverrà

$$x^nFq = z\,;$$

equazione che può scriversi così

$$Qx^n = z\,,$$

chiamando Q la funzione rapppresentata da Fq.

389. Esaminiamo ora l'equazione differenziale

$$Mdx + Ndy = o$$

nella quale i coefficienti M ed M sono funzioni omogenee delle due variabiii x, ed y di una dimensione n.
dividendo questa equazione per x^n, essa potrà mettersi sotto la forma

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + F\left(\frac{y}{x}\right)dy = o;$$

e se facciamo $\frac{y}{x} = z$, questa equazione diverrà

$$dx\varphi z + dyFz = o$$

o piuttosto

$$\varphi z + Fz\frac{dy}{dx} = o \;.\;.\;.\; (91).$$

Per eliminare totalmente y per mezzo dell' equazione $\frac{y}{x} = z$ o, piuttosto $y = xz$, differenzieremo questa ultima equazione, ed otterremo

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{xdz}{dx};$$

questo valore riduce l'equazione (91) a

$$\varphi z + Fz\left(z + \frac{x dz}{dx}\right) = 0,$$

da cui si tira

$$\frac{x dz}{dx} = -\frac{\varphi z}{Fz} - z = -\frac{(\varphi z + zFz)}{Fz};$$

e separando le variabili,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dzFz}{\varphi z + zFz};$$

e perciò

$$\log x = -\int \frac{dzFz}{\varphi z + zFz} + C.$$

Quando l'integrazione si sarà fatta, non si tratterà più che di sostituire nel risultamento a z il suo valore

390 Prendiamo per esempio l' equazione $x^2 dy = y^2 dx + xy dx$: facendo $y = zx$, troveremo

$$dy = zdx + xdz;$$

e sostituendo questi valori, l'equazione diverrà

$$x^2 z dx + x^3 dz = z^2 x^2 dx + zx^2 dx;$$

riducendo, e dividendo pel fattore comune x^2, si otterrà

$$x dz = z^2 dx:$$

questa equazione divisa per xz^2 dà

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2},$$

ed integrando si avrà

$$\log x = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + C = -\frac{x}{y} + C.$$

391 Prendiamo per secondo esempio l' equazione

$$\frac{x^2 + xy}{x - y} dy = y dx;$$

facendo scomparire il denominatore, si vede che tutt' i termini di questa equazione hanno due dimensioni; perciò supporremo $y = zx$; sostituendo questo valore di y nell' equazione precedente, e riducendo, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{(1-z)}{(1+z)};$$

sostituendo a $\frac{dy}{dx}$ il suo valore tirato dall' equazione $y = zx$, si avrà

$$z + \frac{x dz}{dx} = z \frac{(1-z)}{1+z};$$

facendo passare z al secondo membro, e riducendo allo stesso denominatore, si troverà,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(1+z)}{2z^2} dz$$

ed in fine

$$\log x = -\int \frac{dz}{2z^2} - \int \frac{dz}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2} \log z$$

$$+ C = \frac{x}{2y} + \frac{1}{2}\log\frac{y}{x} + C.$$

** 392 Allorchè l' equazione, proposta oltre de' termini $Ax^p y^q \ldots Bx^{p'} y^{q'} +$ ec., contiene de' polinomii come

$$(Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{ecc})^k dx,\ (Px^t y^u + Qx^{t'} y^{u'} + \text{ecc.})^l dy,$$

le variabili saranno ancora separabili, se si ha

$$p + q = p' + q' = (r + s)k = (r' + s')k$$
$$= (t + u)l = (t' + u')l \ldots (92).$$

Per dimostrarlo facciamo

$$(r + s)k = n,\ (r' + s')k = n \ldots (93),$$

e dividiamo per x^n tutt' i termini del polinomio

$$(Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{ec.})^k;$$

questo polinomio diverrà

$$\left(\frac{Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{ec.}}{x^{\frac{n}{k}}}\right)^k$$

$$= \left(\frac{My^s}{x^{\frac{n}{k} - r}} + \frac{Ny^{s'}}{x^{\frac{n}{k} - r'}} + \text{ecc.}\right)^k;$$

or l' equazioni (93) ci danno

$$\frac{n}{k} - r = s,\ \frac{n}{k} - r' = s';$$

sostituendo questi valori nell'espressione precedente, troveremo

$$\left(M\frac{y^s}{x^s}+N\frac{y^{s\prime}}{x^{s\prime}}+\text{ecc}\right)^k$$

$$=\left[M\left(\frac{y}{x}\right)^s+N\left(\frac{y^\prime}{x^\prime}\right)^{s\prime}+\text{ecc}\right]^k;$$

ciocchè dimostra, che, quando l'equazioni (92) hanno luogo, i polinomii elevati a delle potenze riduconsi, come gli altri termini, a delle funzioni di $\frac{y}{x}$.

Quindi, facendo $\frac{y}{x}=z$, o piuttosto $y=zx$, l'equazione può ridursi ad una funzione di z. Per darne un esempio sia

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\mathrm{d}x\sqrt{x^2-y^2}\ (94):$$

Questa equazione scritta così

$$x^1y^0\mathrm{d}y-y^1x^0\mathrm{d}x=\mathrm{d}x(x^2y^0-x^0y^2)^{\frac{1}{2}},$$

dimostra che l'equazioni (92) sono soddisfatte; perciò faremo $y=zx$, e si avrà

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x};$$

sostituendo questi valori nell' equazione (94), riducendo, e dividendo pel fattore comune, si avrà

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-z^2};$$

e perciò si avrà

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

integrando, si troverà, art. 273

$$\log x = \text{arc}(\text{sen} = z) + C;$$

o, rimettendo il valore di z,

$$\log x = \text{arc}\left(\text{sen} = \frac{y}{x}\right) + C.$$

393 In generale, quando si ha una funzione omogenea delle variabili x, y, z, ec; si può sempre separare una delle variabili, p. e, x, facendo $y = tx$, $z = ux$, ec. (*)

(*) *Eccone il calcolo: sia* $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, *un' equazione omogenea, nella quale* M, N, P, *siano funzioni delle tre variabili* x, y, z; *queste funzioni* M, N, P *conterranno termini della forma* $Ax^py^qz^r$, . . . $Bx^{p'}y^{q'}z^{r'}$, $Cx^{p''}y^{q''}z^{r''}$, *e si avrà* $p + q + r = p' + q' + r' = p'' + q'' + r'' = n$. *Se in uno di questi termini, per esempio, in* $Ax^py^qz^r$, *si sostituiscano i valori* $y = tx$, $z = ux$, *questo termine diverrà*

$$Ax^pt^qx^qu^rx^r = x^{p+q+r}. At^qu^r = x^nAt^qu^r;$$

avendo luogo lo stesso per gli altri termini, se in essi si sostituisca il valore di y, *e di* z, *l' equazione* $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ *avrà* x^n *per fattore comune; supprimendo questo fattore, essa prenderà la forma*

394 Qualche volta s'impiegano esponenti indeterminati per rendere un' equazione omogenea : sia p. e. l' equazione

$$ay^m x^n dx + bx^p dx + cx^q dy = o;$$

si supporrà $y = z^k$, e come l' esponente k non è una variabile, ma una costante incognita, si differenzierà per l' art. 21, e si avrà

$$dy = kz^{k-1}dz \text{ , ed } y^m = z^{km};$$

sostituendo si otterrà

$$az^{km}x^n dx + bx^p dx + ckx^q z^{k-1}dz = o;$$

questa equazione sarà omogenea, se si ha

$$km + n = p \text{ , } q + k - 1 = p;$$

eliminando l' indeterminata k, si troverà

$$\varphi(t, u)dx + F(t, u)d.tx + f(t, u)d.ux = o;$$

ed, eseguendo le differenziazioni indicate, si avrà

$$\varphi(t, u)dx + F(t, u)(tdx + xdt) + f(t, u)(udx + xdu) = o,$$

dalla quale si otterrà

$$[\varphi(t, u) + tF(t, u) + uf(t, u)]dx = -xF[(t, u)dt + f(t, u)du];$$

e perciò

$$\frac{dx}{x} = -\frac{F(t, u)dt + f(t, u)du}{\varphi(t, u) + tF(t, u) + uf(t, u)}.$$

$$\frac{p-n}{m}=p+1-q,$$

equazione di condizione, che dee aver luogo, affinchè l' equazione proposta possa rendersi omogenea colla sostituzione di $y=z$ $=z^{p+1-q}$,

395. Esiste, sulle funzioni omogenee, un teorema importante, che ci diamo a dimostrare nel seguente modo.

Sia $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$ il differenziale di una funzione omogenea z di due variabili x ad y: se rappresentiamo con n la somma degli esponenti delle variabili, in uno de' termini, che compongono questa funzione, avremo l' equazione

$$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=dz \quad . \; . \; . \quad (95).$$

Facendo $\frac{y}{x}=q$, si troverà, (art. 387)

$$\mathrm{Q}x^{n}=z;$$

sostituendo nell' equazione (95) ad y il suo valore qx, e chiamando M', ed N' ciocchè allora divengono M, ed N, l' equazione (95) si trasformerà in

$$\mathrm{M}'dx+\mathrm{N}'d.qx=dz\,;$$

e sostituendo il valore di z, si avrà

$$\mathrm{M}'dx+\mathrm{N}'d.qx=d(\mathrm{Q}x^{n}) \quad . \; . \; . \quad (96)\,;$$

essendo $qdx+xdq$ il differenziale di qx, se metteremo questo valore in luogo di $d.qx$, avremo

$$(\mathrm{M}'+\mathrm{N}'q)dx+\mathrm{N}'xdq=d(\mathrm{Q}x^{n})\,;$$

or $(M' + N'q)dx$ è il differenziale di Qx^n preso per rispetto ad x, sicchè sarà

$$M' + N'q = nQx^{n-1};$$

se si rimette in questa equazione y in luogo di qx, essa diverrà

$$M + N\frac{y}{x} = nQx^{n-1},$$

o

$$Mx + Ny = nz.$$

396 Questo teorema può applicarsi a delle funzioni omogenee di un numero qualunque di variabili, poichè se si avesse, per esempio, l' equazione

$$Mdx + Ndy + Pdt = dz$$

nella quale la dimenzione fosse sempre n, basterebbe di fare $\frac{y}{x} = q$, $\frac{t}{x} = r$, per dimostrare con un ragionamento analogo a quello che abbiamo adoprato, che debba aversi

$$z = x^n F(q, r),$$

ed in seguito

$$My + Nx + Pt = nz.$$

Delle condizioni d' integrabilità delle funzioni di due variabili — Integrazione delle funzioni, che soddisfano a queste condizioni — Ricerca de' fattori proprii a rendere integrabili l' equazioni, che non lo sono immediatamente.

397. Allorchè si ha un differenziale $Mdx + Ndy = 0$, non si può sempre conchiudere che vi è un' equazione, la quale differenziata dia il proposto differenziale, poichè se si differenziasse, per esempio l' equazione $f(x, y) = 0$, e che si avesse $mdx + ndy = 0$, si potrebbe questa equazione moltiplicare per una funzione di x, ed ottenersi un' equazione $Mdx + Ndy = 0$, i cui coefficienti M, N sarebbero differenti da m, ed n; perciò l' equazione $Mdx + Ndy = 0$ non potrebbe essere il risultamento della sola differenziazione di

$$f(x, y) = 0.$$

Lo stesso avverrebbe, se l' equazione . . . $mdx + ndy = 0$ si combinasse arbitrariamente coll' equazione primitiva $f(x, y) = 0$: per esempio eliminando uno o più termini tra . . . $mdx + ndy = 0$, e $f(x, y) = 0$, si potrebbe ottenere un' equazione

$$M'dx + N'dy = 0,$$

nella quale i coefficienti differenziali M' ed N' sarebbero differenti da m, e da n.

398 Un' equazione come $mdx + ndy = 0$,

che si è ottenuta colla sola differenziazione si distingue col nome di differenziale esatto: sarebbe lo stesso di ogni altra funzione differenziale; che non fosse eguale a zero, ma che fosse stata trovata col solo mezzo della differenziazione. Quando un' equazione differenziale $Mdx + Ndy = 0$, non è un differenziale esatto, non si può presumere d'integrarla, che dopo di averla resa un differenziale esatto per mezzo di qualche operazione preparatoria.

399 Eulero ha prima di tutti risoluto questo problema importante.

1.° *Data un' equazione differenziale, determinare come si può conoscere, quando è differenziale esatto*

2.° *Qual è il mezzo d' integrare questa equazione ?*

Prima di dare una soluzione di questo problema, ricorderò, che, dietro la nostra convenzione, (art. 51), l' espressione $\frac{dz}{dx}$ c' indica che la funzione z di x, ed y è stata differenziata per rispetto ad x e divisa per dx(*);

(*) *Sia* $dz = Adx + Bdy + Cdt$, *ec. il differenziale compiuto di* z; *il rapporto* $\frac{dz}{dx}$ *non è altro, che il coefficiente differenziale* A. *Se si cercasse il rapporto di* $Adx + Bdy + Cdt$ *ec.*

in seguito se la stessa funzione $\frac{dz}{dx}$ si differenzii per rispetto ad un' altra variabile y, e si divida per dy, scriveremo il risultamento di questa operazione così $\frac{d^2z}{dxdy}$. Se al contrario si fosse preso da principio il coefficiente differenziale di z per rispetto ad y, e poi per riguardo ad x, il risultamento di questa operazione si sarebbe scritto così

$$\frac{d^2z}{dydx}.$$

Quando z è una funzione di tre variabili x, y, u, un' espressione come $\frac{d^3z}{dxdydu}$ indica che il coefficiente differenziale di z è stato primieramente preso per rispetto ad x; quindi il coefficiente differenziale di $\frac{d^2z}{dx}$ per rispetto ad y;

---

e, dx non potrebbe esser rappresentato da $\frac{dz}{dx}$: *in questo caso il rapporto del differenziale compiuto a dx si scriverà in una delle seguenti maniere*

$$\frac{1}{dx}\,dz, \text{ o } \frac{d(z)}{dx}.$$

e finalmente il coefficiente differenziale di $\frac{d^2z}{dxdy}$ per rispetto ad u. Similmente, l'espressione $\frac{d^5z}{dx^2dy^3}$ indica che sono state fatte cinque differenziazioni successive sopra z, le due prime per rapporto ad x, e le tre altre per rapporto ad y.

400 Ciò posto il teorema di Eulero riposa sulla seguente proposizione dimostrata nell' art. (122).

Se si ha una funzione z *di due variabili* x, *ed* y, *e che si prenda il coefficiente differenziale di* z, *primieramente per rispetto ad* x; *che indi il coefficiente differenziale di* $\frac{dz}{dx}$ *si prenda per rispetto ad* y, *si avrà lo stesso risultamento come se si fosse primieramente preso il coefficiente differenziale di* z *per rispetto ad* y *ed indi il coefficiente differenziale di* $\frac{dz}{dy}$ *per rispetto ad* x; *ciocchè si esprime coll' equazione*

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$$

401 Se si ha per esempio, $z=x^2+xy$, si trova

$$\frac{dz}{dx}=2x+y\,,\ \frac{dz}{dy}=x\,;$$

e perciò

$$\frac{d^2z}{dxdy} = 1 = \frac{d^2z}{dydx}.$$

402 Ciò posto sia z la funzione, il di cui differenziale è $Mdx + Ndy$; si ha

$$M = \frac{dz}{dx},\ N = \frac{dz}{dy}.$$

La prima di queste equazioni differenziata per rispetto ad y, darà

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2z}{dxdy};$$

la seconda differenziata per rispetto ad x, darà

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2z}{dydx};$$

essendo identici i secondi termini di questa equazione, ne risulta

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad . \ . \ (97);$$

tutte le volte che avrà luogo questa equazione di condizione, il proposto differenziale sarà esatto

403 Così si conosce, per esempio, che l'espressione $(2x - y)dx - xdy$ è un differenziale esatto, perchè

$$\frac{dM}{dy} = -1 = \frac{dN}{dx}.$$

L'espresssione

$$(y^3 + 3x^2)dx + (3y^2 + 2xy)dy$$

è anche un differenziale esatto, poichè

$$\frac{dM}{dy} = 2y = \frac{dN}{dx}.$$

404 L' equazione $ydx - xdy = 0$ non è differenziale esatto, poichè

$$\frac{dM}{dy} = 1, \text{ e } \frac{dN}{dx} = -1:$$

Infatti questa equazione deriva da quest' altra

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,$$

trovata immediatamente per mezzo della differenziazione, nella qnale si è soppresso il divisore comune y^2; restituendolo si avrà $M = \frac{1}{y}$, $N = -\frac{x}{y^2}$, e la condizione $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ sarà soddisfatta.

405 Proponiamoci ora d' integrare un' espressione differenziale a due variabili, dopo averla riconosciuta esatta. A tale oggetto, osserveremo primieramente che quando una funzione z di x ed y ha dato per mezzo della differenziazione, $Mdx + Ndy$, il termine Mdx si è ottenuto, riguardando y come costante. Perciò quando integreremo la parte Mdx, la costante che aggiungeremo, potrà contenere y, e rappresentandola con Y, salvo, se il caso l' esige, a riguardare Y come una costante ordinaria, scriveremo

$$u = \int M dx + Y = o \quad . \quad . \quad . \quad (98).$$

Questa equazione essendo quella, che per mezzo della differenziazione, ha dovuto dare $Mdx + Ndy = o$, ne segue che N non è altro, che il coefficiente differenziale di $\int Mdx + Y$ preso per rispetto ad y.

Facendo questa differenziazione, avremo,

$$N = \frac{d \int M dx}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

da questa equazione si tira

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d \int M dx}{dy};$$

ed integrando

$$Y = \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy;$$

questo valore di Y sostituito nell' equazione (98), ci da

$$u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy \quad . \quad . \quad . \quad (99).$$

Bisogna osservare, che $N - \frac{d \int M dx}{dy}$ non contiene x, poicchè questa espressione moltiplicata per dy dee dare per integrale una funzione Y della sola variabile y

406 ** Per dimostrare, che l' espressione $N - \frac{d \int M dx}{dy}$ non è una funzione di x, pren-

deremo il coefficiente differenziale per riguardo ad x, ed avremo

$$\frac{dN}{dx}-\frac{d(d\int Mdx)}{dydx}\ \ldots\ (100);$$

e cambiando l' ordine delle differenziazioni, la seconda parte di questa espressione diverrà

$$\frac{d(d\int Mdx)}{dxdy}=\frac{d\left(\frac{d\int Mdx}{dx}\right)}{dy};$$

or l' integrale $\int Mdx$ essendo stato preso riguardo ad x, il differenziale di $\int Mdx$, relativamente alla stessa variabile x, sarà Mdx; sicchè sarà $\frac{d\int Mdx}{dx}=M$, ciocchè riduce l' espressione $\frac{d\left(\frac{d\int Mdx}{dx}\right)}{dy}$ a $\frac{dM}{dy}$; sostituendo questo valore nell' espressione (100), avremo

$$\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy};$$

or questa quantità è nulla, dietro l' equazione di condizione d' integrabilità, sicchè sarà anche nullo il differenziale di $N-\frac{d\int Mdx}{dy}$ preso per riguardo ad x, ciocchè dimostra che questa espressione non contiene x **.

407 Per mezzo della formola (98), si può integrare ogni funzione di due variabili, che

che soddisfa alla condizione d' integrabilità. Prendiamo per esempio,

$(6xy - y^2)dx + (3x^2 - 2xy)dy \ldots (101)$.

Paragonando questa espressione alla formola $Mdx + Ndy$, abbiamo

$6xy - y^2 = M$, $3x^2 - 2xy = N \ldots (102)$.

Perciò la condizione d'integrabilità è soddisfatta, perchè si trova

$$\frac{dM}{dy} = 6x - 2y = \frac{dN}{dx};$$

integrando l' espressione $(6xy - y^2)dx$, nell' ipotesi di y costante, avremo

$$\int Mdx = \int (6xy - y^2)dx = 3x^2y - y^2x;$$

sostituendo questo valore, e quello di N nell' equazione (99), avremo

$$u = 3x^2y - y^2x$$
$$+ \int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy}\right]dy.$$

La parte affetta dal segno d' integrazione riducesi, dopo di aver eseguita la differenziazione indicata, a

$$\int (3x^2 - 2xy - 3x^2 + 2xy)dy;$$

e togliendo il segno d' integrazione, si ha un differenziale, i cui termini si distruggono; risulta da ciò che l' espressione rappresentata da

$$\int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy}\right]dy,$$

è costante, giacchè è costante ogni quantità il cui differenziale è nullo; segue da ciò che l' integrale cercato è $3x^2y - y^2x + costante$

408 In vece d' impiegare la formola trovata nell' articolo precedente, si avrebbe potuto fare il calcolo direttamente nel seguente modo:

S' integrerà l' espressione (10) riguardando y come costante, e si avrà

$$\int M dx = \int (6xy - y^2) dx + Y;$$

o

$$u = 3x^2y - y^2x + Y \quad . \; . \; . \; (103);$$

differenziando questa equazione per riguardo ad y, si otterrà

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy + \frac{dY}{dy} \quad . \; . \; . \; (104):$$

non essendo altro $\frac{du}{dx}$, che il coefficiente di dy nell' espressione (101), avremo ancora

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy;$$

paragonando questi due valori di $\frac{du}{dy}$ si avrà $\frac{dY}{dy} = 0$ e perciò $Y = costante$, sostituendo ad Y questo valore nell' equazione (103) troveremo

$$u = 3x^2y - y^2x + costante$$

409 Sia ancora la funzione

$$(2y^2x+3y^3)dx+(2x^2y+9xy^2+8y^3)dy\ ;$$

se si paragona all'espressione $Mdx+Ndy$, si troverà

$$M=2y^2x+3y^3\ ,\ N=2x^2y+9xy^2+8y^3\ ;$$

e come si ha

$$\frac{dM}{dy}=4yx+9y^2=\frac{dN}{dx};$$

la funzione proposta è un differenziale esatto. Integrando per riguardo ad x, avremo

$$\int Mdx=y^2x^2+3y^3x+Y\ ,$$

o

$$u=y^2x^2+3y^3x+Y\ ;$$

differenziando questa espressione per riguardo ad y, si otterrà

$$\frac{du}{dy}=\frac{d(y^2x^2+3y^3x)}{dy}+\frac{dY}{dy}$$

da un' altra parte $\frac{du}{dy}$ rappresentando il coefficiente di dy nell' equazione proposta avremo ancora

$$\frac{du}{dy}=2x^2y+9xy^2+8y^3;$$

da questi due valori di $\frac{du}{dy}$ si tira quest' equazione

$$\frac{d(y^2x^2+3y^3x)}{dy}+\frac{dY}{dy}=2x^2y+9xy^2+8y^3$$

e facendo la differenziazione indicata per riguardo ad y, si ha

$$2x^2y+9y^2x+\frac{dY}{dy}=2x^2y+9xy^2+8y^3,$$

equazione che riducesi a

$$\frac{dY}{dy}=8y^3;$$

sicchè sarà

$$Y=\int 8y^3dy=2y^4+C;$$

e perciò l' integrale cercato è

$$u=y^2x^2+3y^3x+2y^4+C.$$

410. Si è veduto (art. 403), che l' equazione $ydx-xdy=0$ non era differenziale esatto, perchè avea perduto il fattore comune $\frac{1}{y^2}$; si vede dunque che possono esservi delle equazioni, le quali, come queste, non sono immediatamente integrabili, ma che lo diverrebbero, si vi si potesse ripristinare un tal fattore.

411 Sia in generale l' equazione . . . . $Pdx+Qdy=0$, ch' è un differenziale esatto, e z sia il fattore comune, che per più generalità supporremo una funzione di x, ed y; avremo

$$P=Mz,\ Q=Nz:$$

Se questi valori si sostituiscano nell' equa-

zione precedente, il fattore comune z scomparirà, e si avrà

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0 \ . \ . \ . \ (105).$$

L'equazione $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = 0$ essendo un differenziale esatto per ipotesi, si avrà

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy} = \frac{d\mathrm{Q}}{dx};$$

sostituendo a P, ed a Q i loro valori, questa equazione diverrà

$$\frac{d\mathrm{M}z}{dy} = \frac{d\mathrm{N}z}{dx}$$

e sviluppando si troverà

$$\frac{\mathrm{M}dz}{dy} + \frac{zd\mathrm{M}}{dy} = \frac{\mathrm{N}dz}{dx} + \frac{zd\mathrm{N}}{dx} \ . \ . \ . \ (106).$$

412 Quando il fattore cumune z è costante, essendo nulli $\frac{dz}{dy}$ e $\frac{dz}{dx}$, l'equazione (106) diverrà

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} = \frac{d\mathrm{N}}{dx}:$$

e perciò resta soddisfatta la condizione necessaria, affinchè l'equazione (105) sia un differenziale esatto. Ma quando z è funzione di x, ed y; la determinazione di z dipende dall' equazione (106); or questa è più difficile ad essere integrata di quello che lo è la proposta, la quale non racchiude che il

solo coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, mentre l'equazione (106) contiene i due coefficienti differenziali $\frac{dz}{dx}$; $\frac{dz}{dy}$, e tre variabili x, y, z.

413 Se l'equazione è omogenea, è facilissimo di determinare questo fattore; poichè sia $Mdx + Ndy = 0$ un'equazione omogenea, che diviene integrabile per mezzo della moltiplicazione di una funzione omogenea z di x, e di y; indicando con u l'integrale dell'equazione $zMdx + zNdy = 0$, si ha

$$zMdx + zNdy = du \quad . \; . \; . \; (107);$$

questa equazione essendo omogenea, se ne deduce, (art. 394)

$$zMx + zNy = nu \quad . \; . \; . \; (108);$$

Or se m rappresenta la dimensione di M, e k quella di z, la dimensione di uno de' termini zMx, zNy sarà $m + k + 1$; sostituito questo valore ad n nell' equazione precedente, si avrà

$$zMx + zNy = (m + k + 1)u;$$

dividendo per questa l' equazione (107), troveremo

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{m + k + 1}.$$

Il secondo membro di questa equazione, essendo un differenziale esatto, tale dee essere anche il primo; d' onde segue che $\frac{1}{Mx + Ny}$

dee essere un fattore proprio a rendere integrabile l' equazione omogenea $Mdx+Ndy=0$

414 Se il fattore comune z, che dee rendere omogenea la proposta, è solamente funzione di x, si ha $\frac{dz}{dy}=0$, ciocchè riduce l'equazione (106) a

$$\frac{zdM}{dy}=\frac{Ndz}{dx}+z\frac{dN}{dx},$$

da cui si tira

$$\frac{Ndz}{dx}=z\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right):$$

e perciò

$$\frac{dz}{z}=\left(\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}\right)dx \ldots (109);$$

integrando si ha

$$\log z=\int\left(\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)dx;$$

moltiplicando per $\log e$, cambiando il coefficiente di $\log e$ in esponente, e passando a' numeri, si trova

$$z = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dy}\right)dx} \quad \ldots (110):$$

Sicchè non si tratterà più che di moltiplicare l'equazione proposta per questo fattore z, affinchè essa divenga un differenziale esatto.

415. Sia, per esempio $ydx - xdy = o$; si ha

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 2 ;$$

ciocchè riduce l'equazione (109) a

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{-x};$$

da cui si ha integrando

$$\log z = -2\log x + \log C = -\log x^2$$
$$+ \log C = \log \frac{C}{x^2};$$

e passando a numeri, si trova $z = \frac{C}{x^2}$; perciò l'espressione $C\frac{(ydx - xdy)}{x^2}$ sarà un differenziale esatto

416 Si può trovare un' infinità di fattori, che hanno la stessa proprietà. Infatti sia z un fattore, che renda esatta l' equazione . . . $Mzdx + Nzdy = o$; rappresentando con u l' integrale di questa equazione, avremo

$$Mzdx + Nzdy = du;$$

moltiplicando i due membri per ϕu, otterremo

$$\phi u(\mathrm{Mz}dx + \mathrm{Nz}dy) = \phi u du.$$

La forma di ϕu essendo arbitraria, possiamo fare, per esempio, $\phi u = 2u^2$, ed allora essendo $2u^2 du$ un differenziale esatto, lo sarà parimente

$$2u^2(\mathrm{Mz}dx + \mathrm{Nz}dy) = 2u^2 du:$$

sicchè il fattore $2zu^2$ avrà la proprietà di rendere integrabile l' espressione

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0.$$

Si vede che si possono fare sopra u infinite altre ipotesi.

Delle condizioni d' integrabilità delle funzioni di tre e di un maggior numero di variabili. Integrazione dell' equazioni di tre variabili, che soddisfano a tali condizioni Dell' equazione di condizione che ha luogo, affinchè l' integrazione dell' equazioni differenziali a tre variabili dipenda da un fattore comune, e de' mezzi di soddisfarvi, quando questa equazione di condizione non esiste.

417. ** Proponiamoci di determinare la condizione d' integrabilità del differenziale di una funzione di tre variabili x, y, z; rappresentando questa funzione per u, avremo

$$du = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dz \;. \;. \;. \;;$$

sicchè sarà

$$M=\frac{du}{dx},\ N=\frac{du}{dy},\ P=\frac{du}{dz}.$$

Queste equazioni possono combinarsi a due a due in tre modi differenti

$$1.^{\circ}\ \frac{du}{dx}=M,\ e\ \frac{du}{dy}=N$$

$$2.^{\circ}\ \frac{du}{dx}=M,\ e\ \frac{du}{dz}=P$$

$$3.^{\circ}\ \frac{du}{dy}=N,\ e\ \frac{du}{dz}=P.$$

418. Con una dimostrazione analoga a quella, che abbiamo addotta precedentemente. si dedurranno da queste equazioni queste altre

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},\ \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx},\ \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy}\ldots(112)$$

In generale, se vi sono n variabili, si avranno tante equazioni di condizioni, quanti prodotti distinti a due a due possono dare queste variabili, cioè $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni di condizione.

419. Quando il differenziale du è nullo, l' equazione (111) riducesi a

$$Mdx+Ndy+Pdz=0;$$

mettiamola sotto la forma

$$dz = mdx + ndy \ldots (113),$$

facendo

$$\frac{M}{P} = -m; \ \frac{N}{P} = -n \ldots (114).$$

Or se riguardiamo z come funzione di x ed y, potremo trattare l' equazione (113), come se non racchiudesse, che queste due variabili; perciò la condizione d'integrabilità si ridurrà a quella dell'art. 401, cioè bisognerà che il differenziale di m, preso per riguardo ad y, e diviso pel differenziale di questa variabile sia eguale al differenziale di n preso per rispetto ad x, e diviso per x. Per ottenere quest' espressioni, osserveremo, che la prima non sarà solamente $\frac{dm}{dy}$; ma dovrà avere un secondo termine proveniente dalla differenziazione della variabile z, riguardata come funzione di y; questo termine sarà dunque rappresentato, (art. 24), da $\frac{dm}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}$.

Ciocchè dicesi del differenziale compiuto preso per riguardo ad y dovendo applicarsi al differenziale compiuto preso per rispetto ad x, l' equazione di condizione (97), (art. 401) sarà nel presente caso

$$\frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dz} \cdot \frac{dz}{dx};$$

trasponendo, ed osservando che dietro l' e-

quazione (113) $\frac{dz}{dx} = m$, e $\frac{dz}{dy} = n$ si ha

$$\frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dy} + n\frac{dm}{dz} - m\frac{dn}{dz} = o. \quad (115)$$

Or differenziando l' equazioni (114), dietro l' art. 19, si ha

$$\frac{dm}{dy} = -\frac{P\frac{dM}{dy} - M\frac{dP}{dy}}{P^2},$$

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{P\frac{dN}{dx} - N\frac{dP}{dx}}{P^2},$$

$$n\frac{dm}{dz} = \frac{N}{P}.\frac{P\frac{dM}{dz} - M\frac{dP}{dz}}{P^2},$$

$$m\frac{dn}{dz} = \frac{M}{P}.\frac{P\frac{dN}{dz} - N\frac{dP}{dz}}{P^2}.$$

sostituendo questi valori nell'equazione (115), riducendo i due ultimi termini, e sopprimendo il denominatore comune P^2, troveremo, cambiando tutt' i segni,

$$P\frac{dM}{dy} - M\frac{dP}{dy} - P\frac{dN}{dx}$$

$$+ N\frac{dP}{dx} - N\frac{dM}{dz} + M\frac{dN}{dz} = 0 \ldots (116).$$

Questa è l'equazione di condizione, che dee aver luogo, affinchè z possa essere considerata come una funzione di due variabili indipendenti x ed y, cioè affinchè possa esservi un' equazione finita tra queste tre variabili; Perciò se si prenda ad azzardo un' equazione $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ tra tre variabili, prima di sapere se l'equazione (116) è soddisfatta; non si potrà dire che una delle variabili è funzione delle due altre: ciò dimostra che l'equazione differenziale proposta richiede necessariamente l'esistenza di una certa equazione tra x, y, z, o in altri termini, che questa equazione differenziale abbia un' equazione unica per integrale.

420. Un' equazione differenziale a tre variabili, per la quale non ha luogo l' equazione (116), era prima riguardata come assurda, o almeno come insignificante; il Sig. Monge dimostrò che si era in errore, come anderemo a vedere.

421. Quando l' equazioni (112) non sono soddisfatte, se rappresenteremo con λ il fattore adattato a render esatta l' equazione differenziale $Mdx + Ndy + Pdz$, l' equazioni di condizione (112) diverranno

$$\frac{d\lambda M}{dy} = \frac{d\lambda N}{dx}, \quad \frac{d\lambda M}{dz} = \frac{d\lambda P}{dx}, \quad \frac{d\lambda N}{dz} = \frac{d\lambda P}{dy};$$

facendo le differenziazioni indicate, si ha

$$M\frac{d\lambda}{dy} - N\frac{d\lambda}{dx} + \lambda\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0$$

$$M\frac{d\lambda}{dz} - P\frac{d\lambda}{dx} + \lambda\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dP}{dx}\right) = 0$$

$$N\frac{d\lambda}{dz} - P\frac{d\lambda}{dy} + \lambda\left(\frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy}\right) = 0$$

Se la prima di queste equazioni si moltiplica per P, la seconda per — N, e la terza per M, e dopo si sommino, i termini che non sono tra le parentesi si distruggeranno; essendo l'equazione divisibile per λ, questo fattore scomparirà, e resterà

$$P\frac{dM}{dy} - P\frac{dN}{dx} - N\frac{dM}{dz}$$

$$+ N\frac{dP}{dx} + M\frac{dN}{dz} - M\frac{dP}{dy} = 0;$$

ch' è l' equazione (116), che abbiamo veduto esser necessaria, affinchè una delle variabili sia funzione delle due altre: risultamento che si accorda con questa ipotesi, poichè se la proposta potesse divenire integrabile colla restituzione di un fattore, essa menerebbe ad una equazione unica tra x, y, z, equazione che sarebbe contradittoria con ciocchè precede, poicchè una delle variabili sarebbe funzione delle due altre.

422. Esaminiamo in qual modo si può determinare l' integrale, quando l' equazione

(116) è soddisfatta. A tale oggetto riguardiamo sulle prime z come costante nell' equazione $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, e chiamiamo λ il fattore atto a rendere questa equazione un differenziale esatto: ne rappresenteremo l' integrale per V, ed allora V sarà in generale, una funzione delle tre variabili x, y, z; questo integrale dovrà essere completato da una costante arbitraria funzione di z, che disegneremo con φz, di sortachè si avrà

$$V + \varphi z = 0$$

Il coefficiente differenziale di questa equazione preso per rapporto a z, dovendo essere identico al termine che moltiplica dz nella proposta, bisognerà che sia

$$\frac{dV}{dz} + \frac{d\varphi z}{dz} = P\,,$$

da cui si avrà

$$d\varphi z = \left(P - \frac{dV}{dz}\right)dz.$$

Come il primo membro di questa equazione non contiene che z, il secondo dee ridursi ad una funzione di z, che, integrata, darà il valore di φz.

423. Sia, per esempio, l'equazione

$$yzdx + xzdy + xydz = 0\,;$$

integrando $yzdx + xzdy$, con riguardare z come costante, si troverà

$$zxy + \varphi z = 0\,;$$

questa equazione differenziata per rapporto a z divisa per dz, e posta eguale al coefficiente di dz della proposta, ci darà

$$xy + \frac{d\varphi z}{dz} = xy;$$

sicchè sarà

$$\frac{d\varphi z}{dz} = o;$$

e perciò $\varphi z = costante$; dal che dedurremo $xyz + C$ per l' integrale della proposta, come dovea essere

424 Sia ora l' equazione $Mdx + Ndy + Pdz = o$ un' equazione differenziale, per la quale l' equazione di condizione (116) non ha luogo: indichiamo con λ il fattore atto a rendere solamente integrabile $Mdx + Ndy$, presa con riguardare z come costante, e moltiplicando la proposta per questo fattore; avremo

$$\lambda Mdx + \lambda Ndy + \lambda Pdz = o \ . \ . \ . \ (117);$$

integrando la parte $\lambda Mdx + \lambda Ndy$ nell' ipotesi di z costante, l' integrale che otterremo potrà essere rappresentato, come nell' articolo 421, da

$$V + \varphi z.$$

Il differenziale di questa equazione essendo preso per riguardo alle tre variabili, non ne potremo conchiudere la sua identità coll' equazione (117), poichè questa non può nascere dalla differenziazione di un' altra; d' onde segue che l' equazione

$$\frac{dV}{dz}+\frac{d\varphi z}{dz}=\lambda P \ldots (118)$$

non può sussistere che per mezzo di una condizione indipendente dall' ipotesi, nella quale l'equazione (117) derivi da una sola equazione differenziata. Come non abbiamo altro scopo che quello di soddisfare l' equazione (117), usciremo da questa ipotesi, e stabiliremo arbitrariamente tra le variabili x, y, z la relazione (118); allora l' equazioni

$$V+\varphi z=0 \text{ e } \frac{dV}{dz}+\frac{d\varphi z}{dz}=\lambda P \ldots (119)$$

insieme soddisferanno l'equazione (117), differenziando la prima dell' equazioni (119) ed unendola alla seconda; infatti il differenziale di $V+\varphi z$ preso per rapporto ad x ed ad n. darà i termini $\lambda M dx+\lambda N dy$, e la seconda dell' equazioni (119) moltiplicata per dz darà il valore del termine $\lambda P dz$.

425 Prendiamo, per esempio, l' equazione

$$ydy+zdx=dz;$$

se z si riguarda come costante, il fattore proprio a rendere integrabile la parte . . . $ydy+zdx$, è z; perciò avremo

$$2ydy+2zdx-2dz=0 \ldots (120).$$

Questa equazione sarà soddisfatta dal sistema delle due seguenti

$$y^2+2zx+\varphi z=0, \quad 2x+\frac{d\varphi z}{dz}+2=0 \ldots (121)$$

Infatti la prima differenziata per rispetto a tutte le variabili darà

$$2ydy + 2zdx + 2xdz + \frac{d\varphi z}{dz}dz = 0 \; ;$$

tirando da questa equazione il valore di $2ydy + 2zdx$, e sostituendola nell' equazione (120), questa si ridurrà a

$$-2xdz - \frac{d\varphi z}{dz} - 2dz = 0$$

equazione soddisfatta in se stessa, in virtù della seconda dell' equazioni (121).

426. L'equazioni (121) ci mostrano che la forma della funzione φz è assolutamente arbitraria, e che perciò se si fa, per esempio, $\varphi z = z^3$, il sistema dell' equazioni

$$y^2 + 2zx + z^3 = 0, \quad 2x + 3z^2 - 2 = 0 \ldots (122)$$

anche sarà soddisfacente.

427. Per mezzo di queste, due equazioni tra tre variabili, si potrà costruire una curva a doppia curvatura, che soddisferà alla proposta in tutt' i suoi punti, ma se invece di prendere $\varphi x = z^3$, si prendesse un' altra funzione di z per φz si determinerebbe un' altra urva a doppia curvatura, che soddisferebbe egualmente alla proposta, d' onde segue che l' equazioni (121) rappresentano una serie di curve a doppia curvatura, che soddisfano all' equazione proposta e che sono legate tra loro dalla proprtetà comune, che le

loro equazioni non differiscono che per gli termini φz, e $\frac{d\varphi z}{dz}$ **.

Teorica delle costanti arbitrarie

428 Data un' equazione tra le variabili x, y e costanti, differenziandola, si otterrà un' equazione, che dovrà contenere il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, di sorta che queste due equazioni potranno rappresentarsi così

$$F(x, y) = o, \; F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o \ldots (123);$$

Le variabili, e le costanti avendo in queste equazioni gli stessi valori, possiamo in generale eliminare tra esse una delle costanti; dico in generale, poichè vi sono de' casi particolari, ne' quali questa eliminazione diverrebbe impraticabile; per esempio, se si avesse l'equazione $y = ax + b$, e perciò $\frac{dy}{dx} = a$, la costante a potrebbe eliminarsi, ma sarebbe impossibile di eliminar b per mezzo di queste equazioni, a meno che non si supponesse una relazione data tra a, e b. Questa osservazione basta per far comprendere il senso generale che dee darsi a tutta questa teorica delle costanti arbitrarie. Per ritornare al n.° oggetto, eliminando una costante tra

l'equazioni (123), si otterrà un' equazione di prim' ordine, che racchiuderà una costante di meno dell' equazione $F(x, y)=o$; se si differenzia due volte di seguito l' equazione $F(x, y)=o$; comprendendovi questa stessa, si avrebbero le seguenti equazioni

$$F(x, y)=o, F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=o ;$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2}\right)=o \ldots (124).$$

Con queste tre equazioni si possono eliminare due costanti, e come le equazioni sono state tutte impiegate a questa operazione, quella che ne risulterà, dovrà contenere gli stessi coefficienti differenziali, e perciò sarà di second' ordine; ma essa avrà due costanti di meno dell' equazione $F(x, y)=o$; ed in generale si vede che l' equazione differenziale dall' ordine n non può contenere che n costanti di meno dell' equazione $F(x, y)=o$, dalla quale deriva.

429. Siano a, e b le costanti, che possono eliminarsi, per mezzo dell' equazioni (124), e che chiamansi costanti arbitrarie (*); se si

(*) *Esse sono così chiamate, poichè una qualunque di queste costanti può esser riguardata come provveniente dall' integrazione di una equazione differenziale di prim' ordine. Infatti sia l' equazione* $f(x, y, a, b$ *ec*$)=o$

elimina b tra $F(x, y) = 0$, e l' altra . . . $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, che deducesi dalla prima per mezzo della differenziazione, si otterrà un' equazione differenziale di primo ordine, che rappresenteremo con

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0 \ldots (125).$$

Da un' altra parte, il risultamento dell' eliminazione di a tra le stesse equazioni . . . $F(x, y) = 0$, e $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, ci da

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0 \ldots (126).$$

430. Se, con un mezzo qualùnque, si giungesse a trovare l' equazioni (125) e (126); si vede che basterebbe eliminare per mezzo

---

se *ne tira* $\varphi(x, y, b, ec) = a$, *e differenziando si avrà* $d\varphi(x, y, b\ ec) = 0$; *perciò* a *può esser considerata come la costante arbitraria, che si unirebbe all' integrale di* . . . $d\varphi(x, y, b\ ec)$. *Nello stesso modo, due qualunque di queste costanti possono essere considerate come provvenienti dall' integrazione di un' equazione differenziale di second' ordine, e così in seguito.*

di esse $\frac{dy}{dx}$, onde ottener l' equazione... $F(x, y) = 0$. Se si elimina la costante a per mezzo dell' equazione (125), e quella che se ne dedurrebbe dalla differenziazione, e che parimenti si elimini b per mezzo dell' equazione (126), e quella che si otterrebbe colla differenziazione, si otterranno due equazioni di second' ordine, che non conterranno più le costanti arbitrarie a, b, e che perciò dovranno coincidere; altriment' i valori di x ed y non sarebbero gli stessi nell' una, e nell' altra. Segue da ciò, che un' equazione differenziale di second'ordine può nascere da due equazioni differenziali di prim' ordine, che sono necessariamente differenti, poichè la costante arbitraria dell' una non è la stessa della costante arbitraria dell' altra.

Rappresentiamo con $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}\right) = 0$, questa equazione differenziale di second' ordine, che deriva dall' eliminazione delle costanti arbitrarie a, b; l' equazioni (125), e (126) ne sono i primi integrali; l' equazione primitiva $F(x, y) = 0$ n' è il secondo integrale.

431. Applichiamo le stesse considerazioni all' equazione differenziale di terzo ordine: differenziando tre volte di seguito l' equazione $F(x, y) = 0$, avremo, comprendendovi essa stessa.

$$F(x, y) = 0, F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$F\left(x,\ y,\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\ ,$$

$$F\left(x\ ,\ y,\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\right)=0:$$

Quest' equazioni ammettendo gli stessi valori per ciascuna delle tre costanti arbitrarie, che $F(x\ ,\ y)$ racchiude, si possono generalmente eliminare queste costanti per mezzo di queste equazioni, ed ottenere un risultamento, che rappresenteremo con

$$f\left(x\ ,\ y\ ,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\right)=0\ \ldots\ (127):$$

Questa sarà l'equazione differenziale di terz' ordine di $F(x\ ,\ y)=0$, dalla quale si troveranno eliminate le tre costanti arbitrarie; reciprocamente $F(x\ ,\ y)=0$ sarà il terzo integrale dell' equazione (127).

432. Se successivamente si elimini ciascuna delle costanti arbitrarie per mezzo dell' equazione $F(x\ ,\ y)=0$, e quella che se ne dedurrebbe per mezzo della differenziazione, si otterranno tre equazioni di prim' ordine, che saranno i secondi integrali dell' equazione (127).

Infine, se si eliminino due delle tre costanti per mezzo dell' equazione $F(x\ ,y)=0$, e delle altre, che si dedurranno per mezzo di due differenziazioni successive, cioè se si eliminino queste costanti per mezzo dell' equazioni

$$F(x\ ,\ y)=0\ ,\ F\left(x\ ,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0\ ,$$

$$F\left(x\ ,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\ \ldots\ (128),$$

si potrà successivamente conservare una delle costanti arbitrarie nell' equazione che si otterrà, dietro l' eliminazione; perciò si avranno tante equazioni, quante sono le costanti arbitrarie. Siano dunque a, b, c queste costanti arbitrarie; l' equazioni di cui parliamo, considerate solamente sotto il rapporto delle costanti arbitrarie, che racchiudono, potranno essere rappresentate così

$$\varphi c = 0\,,\ \varphi b = 0\,,\ \varphi a = 0\ \ldots\ (129).$$

Come l' equazioni (128) concorrono tutte all' eliminazione, per mezzo della quale si ottiene una di queste ultime, segue da ciò che l' equazioni (129) saranno ciascuna del secondo ordine; esse si chiamano primi integrali dell' equazione (127).

433. In generale, un' equazione differenziale di un ordine n avrà un numero n di primi integrali, che perciò conterranno i coefficienti differenziali da $\frac{dy}{dx}$ fino a $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, inclusivamente, cioè un numero $n-1$ di coefficienti differenziali; e si vede che quando sono tutte note queste equazioni, basterà di eliminare, per mezzo di esse, questi coefficienti differenziali, onde ottenere l' equazione primitiva.

Delle soluzioni particolari dell' equazioni differenziali di prim' ordine.

434. Abbiamo veduto (art. 355), che un integrale particolare potea sempre dedursi dal-

l' integrale compiuto, dando un valore convenevole alla costante arbitraria, che quest' ultimo racchiude: intanto non bisogna credere, che, per ogni equazione differenziale proposta, il valore che può soddisfarvi, debba sempre trovarsi compreso in uno di questi integrali particolari. Per esempio, se si avesse l' equazione

$$dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}=xdx+ydy \ldots (130),$$

il cui integrale compiuto è

$$y+c=\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

e che perciò, elevat' a quadrato, diviene

$$2cy+c^2-x^2+a^2=0 \ldots (131);$$

egli è certo, che, dando a c un valore costante arbitrario, si otterrà un integrale particolare, che avrà la proprietà di soddisfare alla proposta. Vi ci si può ancora soddisfare per mezzo dell' equazione

$$x^2+y^2=a^2 \ldots (132);$$

poichè questa equazione differenziata da . . . $xdx=-ydy$; questo valore e quello di x^2+y^2 sostituiti nell' equazione (130), ne distruggono i due membri di essa; e pure l' equazione (132) non è compresa nell' integrale compiuto, poichè qualunque valore costante si da a c nell' equazione (131), giammai questa equazione non potrà dare per risultamento l' altra (132); poicchè, essendo la prima quella di una parabola, non può in verun caso divenire l' equazione (132), che è quella di un cerchio.

L' equazione (132), che soddisfa alla pro-

posta, senza essere rinchiusa nell' integrale compiuto, chiamasi una soluzione particolare, o singolare della proposta. Clairaut, fin dall' anno 1734, avea osservato questo fatto, e lungo tempo si credè che tali equazioni non aveano alcun rapporto coll' integrale compiuto: La Grange ha fatto vedere, ch'esse ne dipendevano, ed a tale oggetto espose la teorica, che andiamo a sviluppare.

435. Sia $Pdx + Qdy = 0$ un' equazione differenziale di prim' ordine. Può concepirsi che questa equazione sia il risultamento dell' eliminazione di una costante c tra una certa equazione dello stesso ordine che rappresenteremo con $Mdx + Ndy = 0$, e l' integrale compiuto di questa $F(x, y, c) = 0$. Or da che tutto riducesi a prendere la costante c in modo che l' equazione $Pdx + Qdy = 0$ sia il risultamento dell' eliminazione, si vede che egli è anche permesso di far variare questa costante, purchè l' equazione $Pdx + Qdy = 0$ abbia luogo: in questo caso l' integrale compiuto $F(x, y, c) = 0$ acquisterà una maggiore generalità, e rappresenterà un infinità di curve dello stesso genere, le quali differiscono le une dalle altre per un perametro, o sia per una costante. Questa ipotesi è ammisibile, poichè quando è data l' equazione $Pdx + Qdy = 0$, è nello spirito dell' analisi di non rigettare alcun de' mezzi che hanno potuto produrre questa equazione.

436. Supponiamo dunque, ch' essendo differenziato l' integrale compiuto, considerando c come variabile, siasi avuto

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{C}dc = 0 \quad . \; . \; . \; (133) ,$$

equazione che può mettersi sotto queste due forme

$$dx + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} dy + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}} dc = 0 ,$$

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} dx + dy + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{N}} dc = 0.$$

È certo che se, restando M ed N finiti, Cdc sia nullo, il risultamento dell' eliminazione di c tra $\mathrm{F}(x, y, c) = 0$, e l'equazione (133), sarà lo stesso di quello di c tra $\mathrm{F}(x, y, c) = 0$, e l'equazione $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$, risultamento che per ipotesi è $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = 0$, poicchè in questo caso l'equazione (133) non differisce dall' altra $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$, per la ragione che C$dc$ è nullo; ma la condizione $\mathrm{C}dc = 0$ richiede che uno de' fattori di questa equazione sia nullo, cioè che sia

$$dc = 0 , \text{ o } \mathrm{C} = 0.$$

Nel primo caso $dc = 0$ da $c =$ *costante*, come ha luogo per gl' integrali particolari; nel secondo caso l'equazione $\mathrm{C} = 0$ conterrà c, o ne sarà indipendente; se essa contiene c, possono accadere due casi, o l' equazione $\mathrm{C} = 0$ non conterrà che costanti, o questa equazione conterrà c con delle variabili; nel primo caso, l' equazione $\mathrm{C} = 0$ darà benanche $c =$ *costante*; e nel secondo essa darà . . . $c = f(x, y)$ (*); sostituito questo valore nel-

(*) *Ben inteso che questa equazione rac-*

l' equazione $F(x, y, c) = o$, la cambierà in un altra funzione di x, e di y, che soddisferà alla proposta, senza esser compresa nel suo integrale compiuto, e perciò ne sarà una soluzione singolare; ma si avrà un integrale particolare, se l' equazione $c = f(x, y)$ si riduce ad una costante, per mezzo dell' integrale compiuto.

437. Quando il fattore $C = o$ dell' equazione $Cdc = o$ non contiene la costante arbitraria c, si conoscerà se l' equazione $C = o$ da luogo ad una soluzione particolare, combinando questa equazione coll' integrale compiuto. Per esempio se da $C = o$ si tira $x = M$, e che questo valore si metta nell' integrale compiuto $F(x, y, c) = o$ si otterrà

$$c = costante = B, \text{ o } c = fy;$$

nel primo, caso $C = o$ sarà un integrale particolare, e nel secondo una soluzione particolare. Ecco in che modo credo che possa dimostrarsi: esaminiamo primieramente il primo caso; c essendo costante arbitraria, sostituiamo B a c nell' integrale compiuto; questo diverrà . . . $F(x, y, B) = o$; dunque, poicchè $x = M$ ridurrebbe $F(x, y, c) = o$ a $c = B$, $x = M$ cambierà $F(x, y, B) = o$ in $B = B$; ciocchè annunzia che le x e le y si distruggeranno a vicenda; ma invece di tirare $x = M$ dall' equazione $C = o$, per sostituirne il valore in

---

chiude come casi particolari quelle ove fosse
$c = fx$, o $c = fy$.

$F(x, y, B) = 0$, si possono eguagliare tra loro i valori $x = M$, $x = N$ tirati dall' equazioni $C = 0$, e $F(x, y, B) = 0$; e come questi valori di x debbono essere identici, possiamo conchiudere che $C = 0$, non è altro che ciocchè diverrebbe $F(x, y, c) = 0$, cambiando c in B; cioè che $C = 0$ è un integrale particolare.

Nel secondo caso, in cui il valore $x = M$ riduce l' integrale compiuto a $c = fy$, se in questo integrale si cambia c in fy, si avrà . . . $F(x, y, fy) = 0$, equazione che diverrà identica sostituendo M ad x, poicche questo valore riduce $F(x, y, c) = 0$ a $c = fy$. Segue da ciò che i valori di x dati dall' equazioni $x = M$, e $F(x, y, fy) = 0$ debbono essere identici, e che perciò identiche debbono essere parimente quest' equazioni; or la prima essendo la stessa di $C = 0$, questa equazione è dunque, nel caso presente, ciocchè diviene $F(x, y, c) = 0$, quando vi si cambia la costante c in fy, d' onde si può conchiudere che $C = 0$ è una soluzione particolare.

438. Applichiamo ora questa teorica alla ricerca delle soluzioni particolari, quando è dato l' integrale compiuto.

Sia l' equazione

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2} \quad . \ . \ . \ . \ (134),$$

il cui integrale compiuto si determina nel seguente modo.

Se questa equazione si divide per dx, e si

faccia $\frac{dy}{dx}=p$, si ha prima di tutto

$$y-px=a\sqrt{1+p^2} \ldots (135);$$

differenziando per rapporto ad x, ed a p si ha

$$dy-pdx-xdp=\frac{apdp}{\sqrt{1+p^2}};$$

osservando che $dy=pdx$, questa equazione riducesi a

$$xdp+\frac{apdp}{\sqrt{1+p^2}}=0;$$

e si soddisfa ad essa, facendo $dp=0$. Questa ipotesi da $p=costante=c$, valore che sostituito nell' equazioue (135), la cambia in

$$y-cx=a\sqrt{1+c^2} \ldots (136).$$

Questa equazione racchindendo una costante arbitraria c, che non era nell' equazione proposta (134), n' è l' integrale compiuto.

439. Ciò posto la parte Cdc dell' equazione (133) si otterrà differenziando l' equazione (136) per rapporto a c riguardata come sola variabile: operando in tal modo si avrà,

$$xdc+\frac{acdc}{\sqrt{1+c^2}}=0;$$

perciò, ponendo eguale a zero il coefficiente di dc, si avrà

$$x = -\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \quad \ldots (137)$$

Per sprigionar il valore di c, eleviamo questa equazione a quadrato, si troverà

$$(1+c^2)x^2 = a^2c^2,$$

da cui si avrà

$$c^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2}, \quad 1+c^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2}, \text{ e}$$

$$\sqrt{1+c^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

eliminando il radicale dell' equazione (137) per mezzo di quest' ultima equazioue, avremo

$$c = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \ldots (138)\ (*)$$

Sostituito questo valore, e quello di $\sqrt{1+c^2}$ nell' equazione (136), avremo

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

da cui si tira

$$y = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2},$$

(*) *Non abbiamo dato il doppio segno al radicale* $\sqrt{1+c^2}$, *perchè, avendo* x, *e* c *segni contrarii all' equazione* (137), *bisogna che lo stesso abbia luogo nell' equzione* (138)

equazione, ch' elevata a quadrato ci darà

$$y^2 = a^2 - x^2;$$

e si vede che questa equazione è effettivamente una soluzione particolare, poichè, differenziandola, si ha $dy = -\frac{xdx}{y}$: questo valore, e quello di $\sqrt{x^2+y^2}$ sostituiti nell' equazione (134), la riducono ad $a^2 = a^2$

440. Clairaut il primo osservò una classe generale d' equazioni suscettibili di una soluzione particolare; quest' equazioni sono comprese nella seguente.

$$y = \frac{dy}{dx}x + F\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

equazione che rappresenteremo con

$$y = px + Fp \quad . \; . \; . \; (139);$$

differenziando troveremo

$$dy = pdx + xdp + \frac{dFp}{dp} . dp;$$

essendo $dy = pdx$, questa equazione riducesi a

$$xdp + \frac{dFp}{dp} dp = 0;$$

e come dp è fattore comune, essa può scriversi così

$$\left(x + \frac{dFp}{dp}\right)dp = 0,$$

Si soddisfa a questa equazione, facendo $dp=0$, ciocchè dà $p=$ *costante* $=c$; perciò sostituendo questo valore nell' equazione (139), avremo

$$y=cx+Fc:$$

questa equazione è l'integrale compiuto della proposta, poicchè per mezzo dell' integrazione vi è stata introdotta una costante arbitraria c. Se questa equazione si differenzia per riguardo a c, si avrà

$$\left(x+\frac{dFc}{dc}\right)dc;$$

sicchè eguagliando a zero il coefficionte di dc si ha l' equazione,

$$x+\frac{dFc}{dc}=0$$

la quale per la sostituzione di c nell' integrale compiuto, darà la soluzione particolare.

Dell' equazioni lineari

441.**Un' equazione differenziale tra due variabili x ed y è lineare quando l' espresioni y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ... $\frac{d^ny}{dx^n}$ non sono elevate, in questa equazione; che al primo grado: perciò supponendo, che A, B, C, D..N, X siano funzioni di x, l' equazione lineare dell' ordine n sarà

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+ D\frac{d^3y}{dx^3} \dots + N\frac{d^ny}{dx^n} = X \ . \ . \ . \ (140)$$

442. Quando questa equazione è di primo grado riducesi ad

$$Ay + B\frac{dy}{dx} = X\ ;$$

facendo scomparire il denominatore, e dividendo per B, può mettersi sotto questa forma,

$$dy + Py dx = Q dx,$$

ed abbiamo veduto (art. 385), che questa equazione avea per integrale

$$y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + C\right).$$

443. Quando il termine in X è nullo nell' equazione (140), se un numero n di valori particolari p, q, r ecc. sostituiti successivamente ad y, hanno ciascuno la proprietà di soddisfargli, basterà di moltiplicare p, q, r ec. per delle costanti arbitrarie a, b, c, ec. per conchiudere che l' integrale definito compiuto di questa equazione è

$$y = ap + bq + cr, \text{ ec.}$$

La dimostrazione di questa proposizione, essendo la stessa per tutt' i gradi, non esamineremo, che l' equazione

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \ldots (141).$$

Sostituendo successivamente ad y i valori ipotetici p, q, *ed* r, avremo

$$Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2p}{dx^2} + D\frac{d^3p}{dx^3} = 0$$

$$Aq + B\frac{dq}{dx} + C\frac{d^2q}{dx^2} + D\frac{d^3q}{dx^3} = 0$$

$$Ar + B\frac{dr}{dx} + C\frac{d^2r}{dx^2} + D\frac{d^3r}{dx^3};$$

moltiplicando queste tre equazioni, la prima per a; la seconda per b, la terza per c, e sommando i risultamenti, si trova

$$A(ap + bq + cr) + B\left(a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx}\right)$$

$$+ C\left(a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2}\right)$$

$$+ D\left(a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3}\right) = 0$$

Or egli è evidente, che questa espressione, ch'è identicamente nulla, è la stessa di quella, che si otterrebbe facendo $y = ap + bq + cr$ nell'equazione(141); dunque questo valore di y soddisfa l'equazione (141), e come essa

contiene tre costanti arbitrarie, perciò è l'integrale finito compiuto dell'equazione (141).

444. Quando X non è nullo nell' equazione

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = X \ldots (142),$$

se si possono trovare tre valori particolari p, q, r, che sostituiti successivamente ad y soddisfacciano ciascheduno all' equazione

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = 0. \ (143),$$

l' integrale finito compiuto dell' equazione (142) sarà;

$$y = ap + bq + cr \ldots (144);$$

ma allora a, b, c invece di essere costanti, saranno funzioni di x, che tra poco impareremo a determinare.

445. Per dimostrare questo teorema, differenziamo l'equazione (144), e dividiamola per dx; avremo

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx}$$
$$+ p\frac{da}{dx} + q\frac{db}{dx} + r\frac{dc}{dx}.$$

Disponiamo delle indeterminate, a, b, c per mezzo di tre condizioni: per la prima facciasi

$$p\frac{da}{dx} + b\frac{db}{dx} + r\frac{dc}{dx} = 0 \ldots (145);$$

resterà

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx}.$$

Una nuova differenziazione ci darà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{da}{dx}\frac{dp}{dx}$$

$$+\frac{db}{dx}\frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx}\frac{dr}{dx} \ldots (146).$$

Per soddisfare alla seconda condizione, facciamo,

$$\frac{da}{dx}\frac{dp}{dx} + \frac{db}{dx}\frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx}\frac{dr}{dx} = 0 \quad (146);$$

resterà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2};$$

differenziando ancora, e dividendo per dx, si avrà

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3}$$

$$+\frac{da}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dc}{dx}\frac{d^2r}{dx^2}.$$

Per soddisfare alla terza condizione, supporremo

$$\frac{da}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx}\frac{d^3q}{dx^2} + \frac{dc}{dx}\frac{d^2r}{dx^2} = \frac{X}{D} \ldots (148),$$

e l' equazione precedente diverrà

$$\frac{d^3y}{dx^3}=a\,\frac{d^3p}{dx^3}+b\,\frac{d^3q}{dx^3}+c\,\frac{d^3r}{dx^3}+\frac{X}{D}.$$

Dico ora che il valore $y=ap+bq+cr$ soddisfaccia all' equazione (142); poichè sostituendo in questa equazione ad y il suo valore, ed in conseguenza anche i valori de' suoi coefficienti differenziali, che abbiamo determinati, e cancellando i termini in X, che si distruggono, si troverà

$$A(ap+bq+cr)+B\left(a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dr}{dx}\right)$$

$$+C\left(a\frac{d^2p}{dx^2}+b\,\frac{d^2q}{dx^2}+c\frac{d^2r}{dx^2}\right)$$

$$+D\left(a\,\frac{d^3p}{dx^3}+b\,\frac{d^3q}{dx^3}+c\,\frac{d^3r}{dx^3}\right)=0\ldots(149).$$

446. Come non si sa se il valore dato ad y fa scambievolmente distruggere tutt' i termini dell' equazione (149), si tratta di dimostrare, che questa equazione è identicamente nulla. A tale oggetto, soddisfacendo p, q, r all' equazione (143), si ha

$$Ap+B\frac{dp}{dx}+C\,\frac{d^2p}{dx^2}+D\,\frac{d^3p}{dx^3}=0$$

$$Aq+B\frac{dq}{dx}+C\,\frac{d^2q}{dx^2}+D\,\frac{d^3q}{dx^3}=0$$

$$Ar + B\frac{dr}{dx} + C\frac{d^2r}{dx^2} + D\frac{d^3r}{dx^3} = o:$$

moltiplicando la prima di queste equazioni per a, la seconda per b, e la terza per c, e sommando i risultamenti, si troverà un'equazione identicamente nulla, che sarà la stessa dell'equazione (149).

447. Per determinare a, b, c, poicchè i coefficienti differenziali $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, $\frac{dc}{dx}$ non entrano, che al primo grado nell'equazioni di condizione (143), (147), e (148), possiamo eliminarne due, e troveremo l'altro in funzione dell' espressioni $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ ecc, che sono funzioni determinate di x, poicchè si conoscono p, q, r, ecc; avremo dunque dell' equazioni della forma

$$\frac{da}{dx} = X_{,} \; ; \; \frac{db}{dx} = X_{,,} \; ; \; \frac{dc}{dx} = X_{,,,} \; ;$$

ò

$$da = X_{,}dx \; ; \; db = X_{,,}dx \; ; \; dc = X_{,,,}dx \; ;$$

ed integrando, si determineranno a, b, c.

448 Questo teorema è applicabile al caso, in cui l'equazione lineare fosse di un ordine qualunque; perciò l'integrazione di quest' equazioni riducesi a quella dell'equazione

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots N\frac{d^ny}{dx^n} = o \quad \ldots (150)$$

449. Quando l' equazione lineare dell'ordine n ha coefficienti costanti, è facile il determinare l' integrale. In fatti, se nell' equazione (150) si fa $y=e^{mx}$, differenziando si troverà

$$\frac{dy}{dx}=e^{mx}m,\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{mx}m^2,\ \frac{d^3y}{dx^3}=e^{mx}m^3,\ \text{ecc.};$$

sostituendo questi valori nell' equazione (150) si otterrà

$$e^{mx}(A+Bm+Cm^2....+Nm^n)=0\ ...(151)\ ;$$

siano m', m'', m''' ecc, le radici dell' equazione

$$A+Bm+Cm^2....+Nm^n=0\ ...\ (152)\ ,$$

l' equazione (150) sarà soddisfatta da questi valori

$$y=e^{m'x},\ y=e^{m''x},\ y=e^{m'''x},\ \text{ecc.}$$

e come si hanno i valori di y, l' integrale finito compiuto dell' equazione (150) sarà

$$y=ae^{m'x}+be^{m''x}+Ce^{m'''x},\ \text{ecc.}$$

450. Quando è $m'=m''$, i termini $ae^{m'x}$, e $be^{m''x}$, si riducono ad $(a+b)e^{m'x}$, ed allora la somma $a+b$ dovendo considerarsi come una sola costante, non si trova più un numero n di costanti arbitrarie nell' espressione di y. In questo caso è dimostrato che se $y=e^{m'x}$ soddisfa alla proposta, il valore $y=xe^{m'x}$ debba anche soddisfarlo. Infatti dif-

ferenziando quest' ultima equazione, si trova

$$\frac{dy}{dx} = xe^{m'x}m' + e^{m'x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^{m'x}m'^2 + 2e^{m'x}m'$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^{m'x}m'^3 + 3e^{m'x}m'^2 + \text{ecc};$$

Questi valori riducono l'equazione (150) a

$$xe^{m'x}(A + Bm' + Cm'^2 + Dm'^3 + \text{ecc.})$$

$$+ e^{m'x}(B + 2Cm' + 3Dm'^2 + \text{ecc}) \quad . \; . \; . \; (153).$$

Or l'equazione (152) avendo per ipotesi due radici eguali, si sa dalla teorica dell'equazioni, che l'espressione $B + 2Cm + 3Dm^2 + \text{ec}$, ne conterrà una di meno della proposta, e si annienterà, quando si farà $m = m'$, d'onde segue che l'espressione (153) è identicamente nulla. Perciò l'equazione (150) sarà soddisfatta dal valore $y = xe^{m'x}$, ed avrà per integrale compiuto

$$y = ae^{m'x} + bxe^{m'x} + ce^{m''x} + \text{ecc.}$$

451. Se vi fossero tre radici eguali a m, nello stesso modo si dimostrerebbe, che l'equazione (150) sarebbe soddisfatta facendo

$$y = e^{m'x} + xe^{m'x} + x^2e^{m'x};$$

e così in seguito

452. Quando l'equazione (152) ha radici imaginarie, se una di queste è $h+k\sqrt{-1}$, l'altra allora sarà $h-k\sqrt{-1}$, e nel valore di y si avranno questi due termini

$$ae^{hx+kx\sqrt{-1}}+be^{hx-kx\sqrt{-1}},$$

o

$$e^{hx}\left(ae^{kx\sqrt{-1}}+be^{-kx\sqrt{-1}}\right) \ . \ . \ . \ (154)$$

Or è nota la formola (*nota terza*)

$$e^{\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1};$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1},$$

paragonando l'espressione (154) a questa formola, potremo rimpiazzare

$e^{kx\sqrt{-1}}$ per mezzo di $\cos kx+\operatorname{sen}kx\sqrt{-1}$,
ed

$e^{-kx\sqrt{-1}}$ per mezzo di $\cos kx-\operatorname{sen}kx\sqrt{-1}$,
e la formola (154) diverrà

$$e^{hx}(a\cos kx+a\operatorname{sen}kx\sqrt{-1}$$
$$+b\cos kx-b\operatorname{sen}kx\sqrt{-1}),$$

espressione che può scriversi così

$$e^{hx}[(a+b)\cos kx+(a-b)\operatorname{sen}kx\sqrt{-1}]\ldots(155).$$

Quando X è zero nell' equazione (140), essendo a, b, c costanti arbitrarie (art. 443), possiamo supporre $a+b=c$, $a-b=c'\sqrt{-1}$; allora la parte immaginaria dell' equazione (154) svanirà.

Dell' integrazione dell' equazioni simultanee.

453. Proponiamoci ora d' integrare in una sola volta due o più equazioni differenziali. Siano

$$\left.\begin{array}{l} My + Nx + P\frac{dy}{dt} + Q\frac{dx}{dt} = T \\ M'y + N'x + P'\frac{dy}{dt} + Q'\frac{dx}{dt} = T \end{array}\right\} \ldots (156)$$

le più generali equazioni di primo grado tra le variabili x, y, ed i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, nelle quali i coefficienti M, N, P ec. sono funzioni della variabile indipendente t; queste equazioni possono scriversi così

$$(My + Nx)dt + Pdy + Qdx = Tdt;$$
$$(M'y + Nx)dt + P'dy + Q'dx = T'dt:$$

se la seconda si moltiplichi per una funzione θ di t, ed i risultamenti si sommino, si otterrà

$$[(M + M'\theta)y + (N + N'\theta)x]dt + (P + P'\theta)dy + (Q + Q'\theta)dx = (T + T'\theta)dt; \ldots$$

rappresentando con una sola lettera le quantità tra le parentesi, questa equazione può scriversi così

$$\mathrm{H}y\mathrm{d}t + \mathrm{K}x\mathrm{d}t + \mathrm{R}\mathrm{d}y + \mathrm{S}\mathrm{d}x = \mathrm{T}\mathrm{d}t\,;$$

da questa si ha

$$\mathrm{H}\left(y + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}x\right)\mathrm{d}t$$

$$+ \mathrm{R}\left(\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{T}\mathrm{d}t \quad \ldots \; (157),$$

equazione che sarà della stessa forma dell' altra

$$\mathrm{d}y + \mathrm{P}y\mathrm{d}x = \mathrm{Q}\mathrm{d}x \quad \ldots \; (158),$$

che noi abbiamo integrato nell' art. 385, sotto la condizione

$$\mathrm{d}\left(y + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}x\right) = \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\mathrm{d}x \quad \ldots \; (159),$$

poichè facendo allora

$$y + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}x = z \quad \ldots \; (160),$$

l' equazione (157) diverrà

$$\mathrm{H}z\mathrm{d}t + \mathrm{R}\mathrm{d}z = \mathrm{T}\mathrm{d}t\,;$$

o

$$\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}}z\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}\mathrm{d}t \quad \ldots \; (161);$$

e si vede che questa equazione è della stessa

forma dell' altra (158) poicchè $\frac{H}{R}$, e $\frac{T}{R}$ sono funzioni della variabile indipendente t.

454. Per soddisfare all' equazione (159), basta che si abbia

$$d\left(\frac{K}{H}x\right)=\frac{S}{R}\,dx\,;$$

ed eseguendo la differenziazione indicata dietro l' art. 14, si troverà

$$\frac{K}{H}\,dx+x d\frac{K}{H}=\frac{S}{R}\,dx:$$

affinchè sia soddisfatta questa equazione, bisgua in generale che i moltiplicatori di dx siano eguali; e che perciò il termine . . . $x.d\frac{K}{H}$ sia nullo, cioè, che si abbia

$$\frac{K}{H}=\frac{S}{R}\,;\; d\frac{K}{H}=0 \;\ldots\; (162).$$

In queste equazioni si sostituiranno a K, H, S ed R i loro valori rispettivi, e, dopo di aver fatta la differenziazione indicata, si eliminerà θ rinchiuso in queste equazioni, e si avrà la relazione, che dee aver luogo tra' coefficienti, affinchè sia soddisfatta l' equazione di condizione.

455. Nel caso in cui i coefficienti de' primi membri dell' equazioni (156) sono costanti, essendo eguale a zero il differenziale di una

costante, non resta, che la prima dell' equazioni (162); essa basterà per determinare il fattore θ, che sarà allora costante, perchè sarà eguale ad una funzione di costanti. Rimettendo per K, H, R, S i loro valori, si ha

$$\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}=\frac{Q+Q'\theta}{R+P''\theta};$$

e facendo svanire i denominatori, si vede che θ dee essere determinata per mezzo di un' equazione di secondo grado; chiamando θ' e θ'' questi valori di θ, e supponiamo, che, dopo di averli sostituiti successivamente nell' equazione (161) i coefficienti di $z\mathrm{d}t$, e di $\mathrm{d}t$ divengano nel primo caso p' e q'; e nel secondo p'' e q'', si avrà

$$\mathrm{d}z+p'z\mathrm{d}t=q'\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}z+p''z\mathrm{d}t=q''\mathrm{d}t;$$

integrando, dietro la formola (90), pag. 277, si troverà

$$z=e^{-\int p'\mathrm{d}t}\left(\int q'e^{\int p'\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)+C'$$

$$z=e^{-\int p''\mathrm{d}t}\left(\int q''e^{\int p''\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)+C'':$$

In questi valori si sostituirà quello di z tirato dall' equazione (160), e si avranno due equazione, che conterranno x, y, t.

456 Se, tranne T, T', T'', che riguarde-

remo sempre come funzioni di t, i coefficienti M, N, P, Q ec. siano costanti, e che si abbiano dippiù le tre equazioni

$$dy + (My + Nx + Pz)dt = Tdt$$
$$dx + (M'y + N'x + P'z)dt = T'dt$$
$$dz + (M''y + N''x + P''z)dt = T''dt,$$

la seconda si moltiplicherà per una costante θ e la terza per un altra costante θ', e sommando i risultamenti, si avrà un' equazione che potremo rappresentare per

$$dy + \theta dx + \theta dz + Q(y + Rx + Sz)dt = Udt.$$

Or affinchè questa equazione abbia la forma

$$dy + Pydx = Qdx,$$

bisogna che riguardando la funzione . . . . $y + Rx + Sz$ come una sola variabile y', il differenziale dy' di questa funzione sia eguale a $dy + \theta dx + \theta' dz$, ciocch' esige l' esistenza dell' equazioni di condizione

$$\theta = R, \ \theta' = S;$$

non essendo R, ed S, che funzioni di θ e di θ', in virtù delle operazioni precedenti, risulta che queste equazioni basteranno per determinare i diversi valori delle costanti θ, e θ'.

457. Questo metodo è generale, e si applica ancora alle equazioni differenziali di ordini superiori, perchè queste possono ridursi a primo grado. Per esempio, se si avessero l' equazioni

$$\frac{d^2y}{dt^2} + My + Nx + P\frac{dy}{dt} + Q\frac{dx}{dt} = T$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = M'y + N'x + P'\frac{dy}{dt} + Q'\frac{dx}{dt} = T',$$

o piuttosto

$$\left.\begin{array}{l} d^2y + (My + Nx)dt^2 + (Pdy + Qdx)dt = Tdt^2 \\ d^2x + (M'y + N'x)dt^2 + (P'dy + Q'dx)dt = T'dt^2 \end{array}\right\} \cdot (163),$$

si farebbe

$$dy = pdt\,,\ dx = qdt\ .\ .\ .\ (164)\ ;$$

ed osservando che dt è costante, quest' equazioni diverrebbero

$$dp + (My + Nx + Pp + Qq)dt = Tdt$$

$$dq + (M'y + N'x + P'p + Q'q)dt = Tdt\ ;$$

queste due equazioni colle altre (164) formano quattro equazioni di primo grado, alle quali possono applicarsi i metodi precedenti **.

Dell integrazione di una equazione differenziale di second' ordine.

458. La formola generale dell' equazioni differenziali di second' ordine a due variabili è

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0\ .\ .\ .\ (165).$$

Non cercheremo già d' integrare questa

equazione in questo grado di generalità; ma anderemo ad esaminare, come se ne può trovar l'integrale in diversi casi particolari

459. Consideriamo primieramente l'ipotesi, in cui si ha

$$f\left(x\,,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0\ .\ .\ (166):$$

per integrare questa equazione si farà . . .
$\frac{dy}{dx} = p\,,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, ed essa si ridurrà a

$$f\left(x,\ p\,,\ \frac{dp}{dx}\right)\ .\ ,\ .\ (167).$$

Se questa equazione può integrarsi, e che si abbia da essa $p = X$, si otterrà facilmente il valore di y, poicchè l'equazione $\frac{dy}{dx} = p$ dando $y = \int p dx$, se in questa equazioue si sostituisce il valore di p, si avrà $y = \int X dx$; ma se l'equazione (167), in vece di dare il valore di p per x, desse quello di x in funzione di p, in modo che fosse $x = P$, integrando per parti $dy = p dx$, si avrebbe primieramente

$$y + px - \int x dp;$$

sostituendo in questa equazione ad x il suo valore, si troverebebe

$$y = px - \int P dp.$$

460. Esaminiamo ora il caso, in cui si ha

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \ldots (168):$$

facendo $\frac{dy}{dx} = p$, si troverebbe $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; e sostituendo a dx il suo valore $\frac{dy}{dx}$, questa equazione diverrebbe,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}.$$

Sostituendo nell' equazione (168) questi valori di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{d^2y}{dx^2}$, essa diverrà

$$f(y, p, dy, dp) = 0;$$

se questa equazione può dare $p = Y$, si sostituirà questo valore nell' equazione $dx = \frac{dy}{p}$ ed integrando si otterrà

$$x = \int \frac{dy}{Y}:$$

al contrario se y si determina in funzione di p, e che perciò sia $y = P$; per avere x s' integrerà per parti l' equazione $dx = \frac{dy}{p}$, e si avrà

$$x = \frac{y}{p} + \int y \frac{dp}{p^2};$$

e sostituendo in questa equazione il valore di y, si troverà

$$x = \frac{y}{P} + \int P \frac{dp}{p^2};$$

e dopo di aver integrato si eliminerà p per mezzo dell' equazione $y = P$.

461. Quando l' equazione (165) non racchiude con $\frac{d^2y}{dx^2}$, che una delle tre quantità $\frac{dy}{dx}$, x, ed y, avremo nel primo caso

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; (169);$$

facendo $\frac{dy}{dx} = p$, è perciò $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; si sostituiranno questi valori nell' equazione (169), e si avrà

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Da questa equazione si ha

$$\frac{dp}{dx} = P \quad . \; . \; . \; . \; (170);$$

e perciò

$$x = \int \frac{dp}{P} \quad . \; . \; . \; (171).$$

Da' un altra parte l' equazione $\frac{dy}{dx} = p$ ci da

$$y = \int p dx;$$

e sostituendovi il valore di dx dato dall' equazione (170), si ha

$$y = \int \frac{p dp}{P} \ldots (172).$$

Dopo di aver integrate l' equazioni (171) e (172) si eliminerà per mezzo di esse la quantità p, per avere un equazione in x, ed y

462. Nel caso in cui $\frac{d^2y}{dx^2}$ non si trova combinato, che con una funzione di x, si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X;$$

moltiplicando per dx ed integrando, si trova

$$\frac{dy}{dx} = \int X dx + C;$$

rappresentando con X' l' integrale indicato in questa equazione, si ha

$$\frac{dy}{dx} = X' + C;$$

moltiplicando di nuovo per dx, ed integrando si ha

$$y = \int X' dx + Cx + C'.$$

463. In fine quando $\frac{d^2y}{dx^2}$ è dato in funzione di y, si tratta d'integrare l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y.$$

Per giungervi, essa si moltiplicherà per $2dy$, ciocchè darà

$$2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx} = 2\,Ydy;$$

il primo membro essendo composto come il differenziale di x^2, si troverà integrando

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \int 2Ydy + C:$$

estraendo la radice quadrata, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C + 2\int Ydy};$$

da cui si tirerà, per mezzo di una nuova integrazione

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}} + C.$$

Dell' equazioni differenziali parziali di primo grado.

464. Un' equazione, che sussiste tra coefficienti differenziali combinati, secondo il caso,

con delle variabili, e delle costanti, è, in generale, un' equazione differenziale parziale, o, secondo l' antica denominazione, è un' equazione a differenze parziali. Queste equazioni sono state così chiamate, perchè la notazione de' coefficienti differenziali, ch' esse racchiudono, indica, come l' abbiamo veduto nell' art. 52, che la differenziazione non può essere effettuita, se non parzialmente, cioè riguardando certe variabili come costanti. Ciò suppone che la funzione proposta non contiene che una sola variabile. Per maggiore semplicità non ne supporremo che due, ed esamineremo primieramente l' equazioni differenziali parziali del prim' ordine, le quali non racchiudono, che uno o più coefficienti differenziali del prim' ordine.

465. La prima equazione, che comincereremo ad integrare è la seguente

$$\frac{dz}{dx}=a.$$

Se contro la nostra ipotesi z, invece di essere funzione di due variabili x, ed y, non contenesse che x, si avrebbe un' equazione differenziale ordinaria, che integrata darebbe $z=ax+c$; ma nel caso presente, essendo z una funzione di x, e di y, le y contenute in z hanno dovuto scomparire per mezzo della differenziazione, poicchè, differenziando per rispetto ad x, abbiamo riguardato y come costante. Noi dobbiamo dunque, integrando, conservare la stessa ipotesi, e supporre che la costante arbitraria è in gene-

rale una funzione di y; perciò per l' integrale dell' equazione proposta si avrà

$$z = ax + \varphi y.$$

466. Cerchisi ancora d' integrare l' equazione differenziale parziale

$$\frac{dz}{dx} = X,$$

nella quale X è una funzione di x; moltiplicando per dx, ed integrando troveremo

$$z = \int X dx + \varphi y$$

467. Per esempio, se la funzione rappresentata da X fosse $x^2 + a^2$, l' integrale sarebbe

$$z = \frac{x^3}{3} + a^2 x + \varphi y.$$

468. Non si troverà più difficoltà ad integrare l' equazione

$$\frac{dz}{dx} = Y\ ,$$

e si avrà

$$z = Yx + \varphi y.$$

469. Nello stesso modo s' integrerà ogni equazione, nella quale $\frac{dz}{dx}$ sarà una funzione di due variabili x, ed y. Se per esempio si ha

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{ay + x^2}},$$

riguardando y come costante, s' integrerà dietro l' articolo 271, dopo aver moltiplicato per dx, e chiamando φy la costante che dee aggiugnersi all' integrale, si avrà

$$z = \sqrt{ay + x^2} + \varphi y$$

470. Infine se si vuol integrare l' equazione

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}},$$

si riguarderà sempre y come costante, e si avrà (art. 274)

$$z = \text{arc}\left(\text{sen} = \frac{x}{y}\right) + \varphi y.$$

471. In generale per integrare l' equazione

$$dz = F(x, y)dx$$

Benchè, dietro la notazione di Fontana, questa equazione avrebbe potuto scriversi così $\frac{(dz)}{dx} = F(x, y)$, per indicare che x solamente non si riguarda come costante, pure non abbiamo creduto di doverlo fare, perchè da ciocchè precede, e dietro la natura del secondo membro dell' equazione $dz = F(x, y)dx$, non può esservi equivoco circa l' ipotesi, nella quale dee esser preso il differenziale di z. La stessa osservazione ha luogo per l' equazione dell' articolo 470.

472. Segue da ciocchè precede, che, tranne l' ipotesi di una delle variabili costante, e dell' introduzione nell' integrale di una costante funzione di questa variabile, si segue

lo stesso metodo, che nell'integrazione dell'equazioni differenziali ordinarie.

473. Esaminiamo ora l'equazioni differenziali parziali, che contengono due coefficienti differenziali di prim' ordine, e sia l' equazione

$$M \frac{dz}{dx} + N \frac{dz}{dy} = o,$$

nella quale M, ed N rappresentano date funzioni di x, ed y; se ne tira

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{M}{N} \frac{dz}{dx};$$

sostituendo questo valore nella formola

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \quad . \; . \; . \; (173),$$

la quale non ha altro senso, che quello di esprimere la condizione che z è funzione di x e di y, si ha

$$dz = \frac{dz}{dx} \left(dx - \frac{M}{N} dy \right)$$

o

$$dz = \frac{dz}{dx} \left(\frac{N dx - M dy}{N} \right)$$

Sia λ il fattore proprio a rendere $N dx - M dy$ un differenziale esatto ds; avremo

$$\lambda (N dx - M dy) = ds \quad . \; . \; . \; (174).$$

Per mezzo di questa equazione, elimineremo

$Ndx - Mdy$ dalla precedente, ed avremo

$$dz = \frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}.ds.$$

Infine se si osserva che il valore di $\frac{dz}{dx}$ non è determinato, esso può prendersi tale che $\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}ds$ possa integrarsi, ciocchè esige che $\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}$ sia una funzione di s; poichè si sa che il differenziale di ogni funzione di s dee aver la forma $Fs.ds$. Segue dunque da ciò che debba essere

$$\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx} = Fs,$$

equazione che cambierà la precedente in

$$dz = Fs.ds;$$

da cui si avrà

$$z = \varphi s \; . \; . \; . \; (175).$$

474. Se con questo mezzo s' integra l' equazione

$$x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx} = 0 \; . \; . \; . \; (176),$$

avremo in questo caso $M = -y$, $N = x$, e perciò l' equazione (174) diverrà

$$ds = \lambda(xdx + ydy).$$

Egli è visibile che il fattore λ proprio a rendere integrabile il secondo membro di questa equazione, è 2. Sostituendo questo valore a λ, ed integrando si ha

$$s = x^2 + y^2;$$

sostituendo questo valore nell' equazione (175), avremo per l' integrale dell' equazione (176)

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

475 Sia ora l' equazione

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + R = 0 \ldots (177),$$

nella quale P, Q, ed R sono funzioni delle variabili x, y, z, dividendo per P, e facendo $\frac{Q}{P} = M$, $\frac{R}{P} = N$, potremo metterla sotto questa forma

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = 0 \ldots (178);$$

e facendo $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ essa diverrà

$$p + Mq + N = 0 \ldots (179).$$

Questa equazione stabilisce una relazione tra' coefficienti p e q della formola generale

$$dz = pdx + qdy \ldots (180);$$

senza questa relazione p e q sarebbero interamente arbitrarii in questa formola; poicchè com' è stato osservato, essa non ha altro sen-

so, che quello d'indicare essere z una funzione di due variabili x ed y, e questa funzione può essere qualunque; perciò nell' equazione (180) dobbiamo riguardare p e q come due indeterminate: eliminando p per mezzo dell'equazione (179), otterremo

$$dz + Ndx = q(dy - Mdx) \ldots (181),$$

e q resterà sempre indeterminato; ma si sa (*nota seconda*) che quando un'equazione di questo genere ha luogo, qualunque sia q, bisogna che sia separatamente

$$dz + Ndx = 0, \ dy - Mdx = 0 \ldots (182)$$

476. Se P Q ed R non contengono la variabile z, sarà lo stesso di M, ed N; allora la seconda dell' equazioni (182) sarà un' equazione a due variabili x ed y, e potrà divenire un differenziale esatto per mezzo di un fattore λ, di sorta che, chiamando ds questo differenziale esatto, avremo

$$ds = \lambda(dy - Mdx) \ldots (183)$$

Tirando da questa equazione il valore di . . . $dy - Mdx$, e sostituendolo con quello di q nell' equazione (181), troveremo

$$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{ds}{\lambda} - Ndx \ldots (184).$$

D' altronde integrata l'equazione (187), la quale non contiene nel suo secondo membro, che delle x, ed y, si avrà

$$s = F(x, y);$$

il valore di y tirato da questa equazione, sostituito nell' altra (184) ne ridurrà il secondo membro ad una funzione delle variabili x ed s. Integrando, per riguardo ad x, dietro l' art. (470), applicheremo il segno d' integrazione al termine che contiene il differenziale dx, ed unendovi una costante funzione dell' altra variabile s, avremo.

$$z = -\int N dx + \varphi s \quad \ldots \quad (185).$$

Questo stesso valore di z, avrebbe potuto trovarsi facendo uso solamente dell' equazioni (182): infatti, integrata la seconda di queste equazioni, ci da $F(x, y) = s$; e per s si rappresenta una variabile, che, presa per costante, ha potuto scomparire, dietro la differenziazione, ciocchè risult' ancora dall' integrazione immediata dell' equazione (183); poicchè essendo nullo il valore del differenziale ds, bisogna che s sia una quantità costante. Ciò posto l' equazione $F(x, y) = s$ ci darà $y = f(x, s)$: questo valore di y si sostituirà in seguito nella prima dell' equazioni (182), o, ciocchè vale lo stesso, si riguarderà y nella prima dell' equazioni (182), come una funzione di x, e della quantità s considerata come costante, perciò integrando in questa ipotesi la prima dell' equazioni (182): si troverà, come sopra

$$z = -\int N dx + \varphi s$$

477. Per dare un esempio di questa integrazione, prendiamo l' equazione

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=\sqrt{x^2+y^2};$$

in questo caso abbiamo

$$M=\frac{y}{x}, \quad N=-a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x};$$

sostituito il valore di M nell' equazione (183), la cambierà in

$$ds=\lambda\left(dy-\frac{y}{x}dx\right);$$

o piuttosto in

$$ds=\lambda\left(\frac{xdy-ydx}{x}\right),$$

equazione integrabile, se si fa $\lambda=\frac{1}{x}$ (art. 19), ciocchè darà

$$s=\frac{y}{x}$$

questi rispettivi valori di N, e di s, sostituiti nell' equazione (185), la cambieranno in

$$z=a\int dx\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\varphi\frac{y}{x},$$

o piuttosto

$$z=a\int dx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\varphi\frac{y}{x}.$$

Questo calcolo non essendo che indicato, può compirsi nel modo che anderemo a spiegare; osservando che $\frac{x}{y}$ non è altro che la funzione s riguardata come costante, in questa integrazione, avremo

$$z = a\int dx\sqrt{1+s^2}$$
$$+ \varphi\frac{y}{x} = ax\sqrt{1+s^2} + \varphi\frac{y}{x};$$

rimettendo il valore di s, si otterrà

$$z = a\sqrt{x^2+y^2} + \varphi\frac{y}{x}:$$

si perverrebbe anche più prontamente a questo risultamento, se si sostituisse il valore di N nell'equazione (185), ed in seguito quello di y; poichè si troverebbe

$$z = a\int dx\,\frac{\sqrt{x^2+s^2x^2}}{x} = ax\sqrt{1+s^2} + \varphi s$$

sostituendo il valore di s, e riducendo, si avrà

$$z = a\sqrt{x^2+y^2} + \varphi\frac{x}{y}.$$

478. Nel caso più generale, in cui i coefficienti P, Q, R dell' equazione (177), contengono le tre variabili x, y, z, può avvenire, che ciascuna dell' equazioni (182) non racchiuda che le due variabili, che sono in

evidenza, e che perciò esse possono esser presentate sotto la forma

$$dz = f(x, z)dx = 0, \quad dy = F(x, y)dx.$$

Quest' equazioni non possono essere integrate isolatamente, scrivendo, come nell'art. 470

$$z = \int f(x, z)dx + \varphi z, \quad y = \int F(x, y)dx + \varphi y;$$

poicchè si vede che bisognerebbe allora supporre z costante nella prima equazione, ed y nella seconda, ipotesi contradittorie, poicchè una delle tre coordinate x, y, z, non può essere supposta costante nella prima equazione, senza che lo sia parimenti nella seconda.

479. Ecco dunque in qual modo s' integreranno l' equazioni (182), nel caso in cui ciascheduna di essa non racchinde, che le due variabili, le quali sono in evidenza: siano μ, e λ i fattori che rendono l' equazioni (182) differenziali esatti; se rappresentiamo con dU, e dV questi differenziali rispettivamente, avremo

$$\lambda(dz + Ndz) = dU, \quad \mu(dy - Mdx) = dV;$$

per mezzo di questi valori, l' equazione (181) diverrà

$$dU = q \frac{\lambda}{\mu} dV \quad . \; . \; . \; (186).$$

Come il primo membro di questa equazione è un differenziale esatto, bisogna che lo sia parimenti il secondo, ciocchè esige, che $q \frac{\lambda}{\mu}$ sia una funzione di V; rappresentando

questa funzione con φV, l'equazione (186) diverrà

$$dU = \varphi V dV ;$$

da cui per mezzo dell'integrazione si avrà

$$U = \varphi V$$

480. Prendiamo per esempio l'equazione

$$xy \frac{dz}{dx} + x^2 \frac{dz}{dy} = yz ;$$

scriviamola così

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{y} \frac{dz}{dy} - \frac{z}{x} = 0 ,$$

si paragonerà all'equazione (178), e si avrà

$$M = \frac{x}{y} , \; N = - \frac{z}{x} ;$$

per mezzo di questi valori, l'equazioni (182) diverranno

$$dz - \frac{z}{x} dx = 0 , \; dy - \frac{x}{y} dx = 0 ;$$

e facendo svanire i denominatori, si avrà

$$xdz - zdx = 0 , \; ydy - xdx = 0 .$$

I fattori proprii a rendere integrabili queste equazioni sono $\frac{1}{x^2}$, e 2; sostituendogli, ed integrando, si trova $\frac{z}{x}$, ed $y^2 - x^2$; sicchè

mettendo questi valori in luogo di U, e di V, nell' equazione $U = \Phi V$, otterremo per l' integrale della proposta

$$\frac{z}{x} = \Phi(y^2 - x^2).$$

481. Bisogna osservare, che se in vece di p si fosse eliminato q, l' equazioni (182) sarebbero state rimpiazzate da queste

$\mathrm{M}dz + \mathrm{N}dy = 0, \; dy - \mathrm{M}dx = 0 \ldots$ (187):

e come ciocchè abbiamo detto dell' equazioni (182) può applicarsi a queste, ne segue che nel caso, in cui non fosse integrabile la prima dell' equazioni (182), ques' equazioni possono essere rimpiazzate dal sistema delle altre (187), ciocche importa d' impiegare la prima dell' equazioni (187) in luogo della prima dell' equazioni (182); allora si vedrà se l' integrazione è possibile.

482. Per esempio, se si avesse

$$az\frac{dz}{dx} - zx\frac{dz}{dy} + xy = 0,$$

questa equazione divisa per az, e paragonata all' equazione (178), ci darebbe

$$\mathrm{M} = -\frac{x}{a}, \; \mathrm{N} = \frac{xy}{az};$$

perciò l' equazioni (182) diverrebbero

$$dz + \frac{xy}{az}dx = 0, \; dx + \frac{x}{a}dx = 0;$$

e facendo scomparire i denominatori, si avrebbe

$azdz + xydx = 0$, $ady + xdx = 0$ ... (188);
non potendo integrarsi immediatamente la prima di quest' equazioni, che contiene tre variabili, la rimpiazzeremo colla prima dell' equazioni (187), ed invece dell' equazioni (188). avremo queste altre

$$-\frac{x}{a}dz + \frac{xy}{az}dy = 0,\ ady + xdx = 0\ ;$$

sopprimendo il fattore comune $\frac{x}{a}$ nella prima di quest' equazioni, e moltiplicando la prima per $2z$, e la seconda per 2, si trovera

$$-2zdz + 2ydy = 0,\ 2ady + 2xdx = 0,$$

equazioni che hanno per integrali

$$y^2 - z^2,\ \text{e}\ 2ay + x^2\ ;$$

sostituiti questi valori ad U, ed a V si avrà

$$y^2 - z^2 - \varphi(2ay + x^2)$$

483. Osserviamo che la prima dell' equazioni (187) non è che il risultamento dell' eliminazione di dx tra l' equazioni (182).

In general si può eliminare ogni variabile contenuta nei coefficienti M ed N, ed in una parola si possono combinare quest' equazioni in un modo qualunque; se, dopo di avere eseguite queste operazioni, si ottengono due integrali rappresentati da $U = a$, e da $V = b$, essendo a e b due costanti arbitrarie, si potrà sempre conchiudere, che l' integrale è $U = \varphi V$. Infatti poicchè a e b sono due co-

stanti arbitrarie, avendo presa b a piacere, la quantità a si può formare per mezzo di b in un modo qualunque, ciocchè importa che si hà la facoltà di prendere per a una funzione arbitraria di b; questa condizione sarà espressa dall' equazione $a = \varphi b$, (*nota ottava*); perciò avrémo l' equazioni $U = \varphi b$, $V = b$, nelle quali x, y, z rappresentano le stesse coordinate; se tra quest' equazioni si elimina b, si otterrà $U = \varphi V$.

Si può osservare ancora che questa equazione ci fa comprendere, che facendo $V = b$, si dee avere $U = \varphi b =$ *costante*; cioè che U e V sono costanti nel tempo stesso, senza che a e b dipendano l' uno dall' altro, poicchè la funzione φ è arbitraria. Or è questa precisamente la condizione, che ci è data dall' equazione $U = a$ e $V = b$.

484, Per applicare questo teorema sia

$$zx\frac{dz}{dx} - zy\frac{dz}{dy} - y^2 = o:$$

dopo aver diviso per zx, paragoneremo questa equazione all' altra (178), ciocchè ci darà

$$M = -\frac{y}{x}, \; N = -\frac{y^2}{zx};$$

e l' equazioni (182) diverranno

$$dz - \frac{y^2}{zx}\,dx = o, \; dy + \frac{y}{x}\,dx = o$$

o

$$zxdx - y^2dx = o, \; xdy + ydx = o.$$

La prima di quest' equazioni contenendo tre variabili, non cercheremo d' integrarla in questo stato; ma se si sostituisca in essa il valore di ydx tirato dalla seconda, essa acquisterà un fattore comune x, che soppresso, la riduce a

$$zdz + ydy = 0;$$

e si vede che moltiplicandola per 2, essa diviene integrabile; l' altra equazione essendolo parimente, si troverà, integrandole

$$z^2 + y^2 = a, \quad xy = b;$$

da cui si conchiuderà

$$z^2 + y^2 = \varphi xy.$$

485. Termineremo ciocchè ci resta da dire sull' equazioni differenziali parziali del primo ordine colla soluzione di questo problema: *Data un' equazione che contiene una funzione arbitraria di una, o di più variabili, trovare l' equazione differenziale parziale che l' ha prodotta.*

Supponiamo dunque che si abbia

$$z = F(x^2 + y^2);$$

faremo

$$x^2 + y^2 = u \; . \; . \; . \; (189),$$

e la nostra equazione diverrà

$$z = Fu;$$

il differenziale di Fu, dovendo essere in generale una funzione di u moltiplicata per du, potremo fare

$$dz = \varphi u du;$$

Se prendiamo il differenziale di z solamente per riguardo ad x, cioè riguardando y come una costante, dovremo ancora prendere il differenziale di u colla stessa ipotesi, perciò dividendo per dx l'equazione precedente, avremo

$$\frac{dz}{dx} = \varphi u \frac{du}{dx} \quad \ldots (190);$$

se in seguito riguarderemo x come costante, ed y come variabile, troveremo con un metodo analogo

$$\frac{dz}{dy} = \varphi u \frac{du}{dy} \quad \ldots (191);$$

i valori de' coefficienti differenziali $\frac{du}{dx}$, e $\frac{du}{dy}$, ch'entrano nell' equazioni (190), e (191), si otterranno col differenziare successivamente l' equazione (189) per riguardo ad x ed ad y, ciocchè ci darà

$$\frac{du}{dx} = 2x, \ \frac{du}{dy} = 2y;$$

sostituendo questi valori nell'equazioni (190), e (191), avremo

$$\frac{dz}{dx} = 2x\varphi u, \ \frac{dz}{dy} = 2y\varphi u;$$

eliminando φu tra quest'equazioni, troveremo infine

$$y\frac{dz}{dx}=x\frac{dz}{dy}.$$

486. Prendiamo ancora per esempio l'equazione

$$z^2+2ax=F(x-y);$$

facendo

$$x-y=u\ .\ .\ .\ (192),$$

questa equazione diverrà

$$z^2+2ax=Fu;$$

e differenziando si ha

$$d(z^2+2ax)=\varphi u du;$$

prendendo il differenziale indicato per rapporto ad x, riguarderemo z come variabile, in virtù di x che forma parte del suo valore, e dividendo per dx, avremo

$$2z\frac{dz}{dx}+2a=\varphi u\frac{du}{dx}\ .\ .\ .\ (193);$$

operando in un modo analogo, per riguardo ad y, riguardando z come una funzione che varia per causa di y solamente; indi dividendo per dy, troveremo

$$2z\frac{dz}{dy}=\varphi u\frac{du}{dy}\ .\ .\ .\ (194);$$

per eliminare i coefficienti differenziali di du, l'equazione (192) ci da

$$\frac{du}{dx}=1,\ \ \frac{du}{dy}=-1;$$

sostituendo questi valori nell'equazioni (193), e (194), avremo

$$2z\frac{dz}{dx}+2a=\varphi u,\quad 2z\frac{dz}{dy}=-\varphi u;$$

eliminando φu tra quest' equazioni, otterremo

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}+\frac{a}{z}=0.$$

Dell' equazioni differenziali parziali di second' ordine

487. Un'equazione differenziale parziale di second' ordine, nella quale z è una funzione delle due variabili x, ed y, dee sempre contenere uno o un maggior numero de' coefficienti differenziali $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, indipendentemente da' coefficienti differenziali di prim' ordine ch' essa può contenere.

488. Ci limiteremo ad integrare le più semplici dell' equazioni differenziali di second' ordine, e cominceremo dalla seguente

$$\frac{d^2z}{dx^2}=0;$$

moltiplicando per dx, ed integrando per riguardo ad x, aggiungeremo all' integrale una costante arbitraria funzione di y, ed avremo

$$\frac{dz}{dx}=\varphi y:$$

moltiplicando di nuovo per dx, e designando con ψy una funzione di y, che dee aggiungersi all' integrale, troveremo

$$z = x\varphi y + \psi y.$$

489. Proponiamoci ora d' integrare l' equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = P,$$

nella quale P è una funzione di x, ed y; facendo, come nell' equazione precedente, troveremo primieramente

$$\frac{dz}{dx} = \int P dx + \varphi y;$$

una seconda integrazione ci darà

$$z = \int[\int P dx + \varphi y] dx + \psi y.$$

490. Nello stesso modo s' integrerebbe

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = P,$$

e si troverebbe

$$z = \int[\int P dy + \varphi x] dy + \psi x$$

491. L' equazione

$$\frac{d^2 z}{dy dx} = P$$

s' integrerebbe primieramente per riguardo ad una delle variabili, e quindi per rispetto all' altra, ciocchè darebbe

$$z = \int [\int P dx + \varphi y] dy + \varphi x.$$

492. In generale, nello stesso modo si tratterà una dell' equazioni

$$\frac{d^n z}{dy^n} = P, \quad \frac{d^n z}{dx dy^{n-1}} = Q, \quad \frac{d^n z}{dx^2 dy^{n-2}} = R, \text{ ec,}$$

nelle quali P, Q, R, ecc. sono funzioni di x ed y, ciocchè darà luogo ad una serie d' integrazioni, ciascheduna delle quali introdurrà nell' integrale una funzione arbitraria.

493. Dopo l' equazioni che abbiamo esaminate, una delle più facili ad essere integrata è la seguente

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + P \frac{dz}{dy} = Q;$$

designamo con P e Q sempre due funzioni di x ed y. Facendo $\frac{dz}{dy} = u$, trasformeremo questa equazione in

$$\frac{du}{dy} + Pu = Q \quad . \; . \; . \; (195).$$

Per integrare, riguarderemo x come costante, ed allora questa equazione non conterrà che due variabili y, ed u, e avrà la stessa forma dell' equazione

$$dy + Py dx = Q dx \quad . \; . \; . \; (196),$$

trattata nell' art 386, el cui integrale è

$$y = e^{-\int P dx} [\int Q e^{\int P dx} dx + C] \quad . \; . \; . \; (197):$$

paragonando dunque l' equazioni (195), e (196), avremo

$$y=u\,,\ x=y\,;$$

sostituendo questi valori nella formola (197), e cambiando C in ϕx, avremo

$$u=e^{-\int Pdy}[\int Qe^{\int Pdy}dy+\phi x];$$

sostituendo questo valore di u nell' equazione $\frac{dz}{dy}=u$; moltiplicando per dy, ed integrando si troverà

$$z=\int[e^{-\int Pdy}(\int Qe^{\int Pdy}dy+\phi x)]dy+\psi x,$$

494. Nello stesso modo s' integrerebbero l' equazioni

$$\frac{d^2z}{dxdy}+P\frac{dz}{dx}=Q\,;\ \frac{d^2z}{dxdy}+P\frac{dz}{dy}=Q\,,$$

nelle quali P e Q rappresentano funzioni di x; ed a causa del divisore $dxdy$ si conosce, che il valore di z non racchiuderebbe funzioni arbitrarie della stessa variabile.

Della determinazione delle funzioni arbitrarie ch' entrano negl' integrali dell' equazioni differenziali parziali del primo ordine.

495. Le funzioni arbitrarie, che rendono compiuti gl' integrali dell' equazioni differenziali parziali, debbono dertetminarsi per mezzo di condizioni, che dipendono dalla natura de' problemi, i quali hanno prodotte quest' equazioni, problemi, che per la maggior parte appartengono a quistioni fisico-matematiche. Non volendo allontanarci dal n.° soggetto, ci limiteremo a delle considerazioni puramente a-

nalitiche, e cercheremo primieramente quali sono le condizioni racchiuse nell'equazione.

$$\frac{dz}{dx} = a \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

496. Essendo z una funzione di x ed y, questa equazione può esser riguardata come quella di una superficie. Questa, dietro la natura della sua equazione, gode della seguente proprietà, che $\frac{dz}{dx}$ debba essere sempre una quantità costante. Segue da ciò, che ogni sezione EF (Fig. 46) di questa superficie fatta da un piano CD parallelo a quello delle xz è una linea retta. Infatti, qualunque sia la natura di questa sezione, se si divide in un numero infinito di parti mm', $m'm''$, $m''m'''$, ec., queste, per la loro piccolezza, potranno esser riguardate come linee rette, e rappresenteranno gli elementi della sezione; uno di questi elementi mm' facendo con una paralella all'asse delle ascisse un angolo, la cui tangente trigonometrica è rappresentata da $\frac{dz}{dx}$, come quest'angolo è costante, ne segue, che saranno eguali tutti gli angoli $m'mn$, $m''m'n'$, $m'''m''n''$ ec. formati dagli elementi dalla curva con delle rette mn, $m'n'$, $m''n''$ ec. parallele all'asse delle ascisse; ciocchè pruova che la sezione EF è una linea retta.

Fig. 46

497. Si giugnerebbe allo stesso risultamento considerando l'integrale dell'equazione $\frac{dz}{dx} = a$,

che abbiamo veduto essere (art. 465).

$$z = ax + \varphi y \ldots (199);$$

Fig. 46 poichè per tutti i punti della superficie che sono nel piano CD, l'ordinata è eguale ad una costante c rappresentata nella fig. 46 da AB; sostituendo dunque φc a φy, e facendo $\varphi c =$ C, l'equazione (199) diverrà

$$z = ax + C \ldots (200);$$

essendo questa equazione quella di una retta, apparterrà alla sezione EF, che sarà perciò una retta.

498. La stessa cosa avendo luogo per riguardo agli altri piani seganti, che si condurrebbero paralelli a quello delle xz, conchiudiamo che tutti questi piani taglieranno la superficie secondo linee rette, che saranno paralelle; poichè ciascheduna di esse formerà con una paralella all'asse delle x, un angolo, la cui tagente trigonometrica sarà a.

Fig. 46 499. Se ora facciamo $x = o$, l'equazione (199) si ridurrà a $z = \varphi y$, e sarà quella di una curva GHK segnata sul piano delle yz; questa curva contenendo tutt'i punti della superficie, le cui coordinate sono $x = o$, incontrerà il piano CD in un punto m, che avrà per una delle sue coordinate $x = o$, e poichè si ha parimente $y = AB = c$, la terza coordinata, in virtù dell'equazione (200), sarà $z = C$, valore rapresentato da Bm nella figura: Ciocchè diciamo del piano CD potendo applicarsi a tutti gli altri piani che gli sono paralelli, ne risulta, che per tutti i punti della curva, la

cui equazione è $z=\varphi y$, e ch'è segnata sul piano delle y z, partiranno delle rette parallelle all' asse delle x. Ecco ciocchè indicano l' equazioni (198) e (199); e come questa condizione è sempre adempita, qualunque sia la figura della curva, la cui equazione è $z=\varphi y$, si vede che questa curva è arbitraria.

500. Da ciocchè precede segue, che la curva GHK, la cui equazione è $z=\varphi y$, può esser composta da archi di differenti curve, che si uniscono gli uni agli altri, (*) come nella fig. 47, o che lasciano tra loro delle interruzioni in certe parti, come nella fig. 48. Nel primo caso la curva è discontinua, e nel secondo è discontigua. Può osservarsi, che in quest' ultimo caso due coordinate differenti PM e PN corrispondono alla stess' ascissa AP; infine è possibile che la curva, senza essere discontigua, sia composta di una serie infinita di archi infinitamente piccoli, ciascuno de' quali appartiene a curve differenti; in questo caso la curva è irregolare, come sarebbero, per esempio, de' tratti di penna segnati a caso; ma di qualunque maniera sia formata la curva, la cui equazione è $z=\varphi y$, basterà, per co-

Fig. 46. Fig. 47. Fig. 48.

(*) *In questo caso, la curva sarà determinata per mezzo di molt' equazioni, di maniera che la prima darà il valore di una variabile* x, *per esempio, da* $x=a$ *fino ad* $x=b$, *la seconda lo darà da* $x=b$ *fino ad* $x=c$, *e così in seguito.*

struire la superficie di far muovere una retta sempre paralela a sè stessa con questa condizione, che il suo punto m (Fig. 46) percorra la curva GHK, la cui equazione è $z = \varphi y$, e che vien segnata a caso sul piano delle yz.

501. Se in luogo dell' equazione $\frac{dz}{dx} = a$, avevamo quest' altra $\frac{dz}{dx} = X$, nella quale X fosse una funzione di x; allora menando un piano CD (Fig. 46) paralello a quello delle xz, la superficie sarebbe tagliata secondo una certa sezione EF, la quale non sarebbe più una retta, come nel caso precedente; infatti per ogni punto m' preso sopra questa sezione, la tangente trigonometrica dell' angolo $n'm'm''$ formato del prolungamento dell' elemento $m'm''$ della sezione con una paralella all' asse delle ascisse, sarà eguale ad una funzione X della variabile x ascissa di questo punto; e come l' ascissa x è differente per ogni punto; ne segue che l' angolo $n'm'm''$ sarà differente in ogni punto della sezione, ciocchè ci dimostra che EF non sarà più, come precedentemente, una linea retta. La superficie si costruirà nello stesso modo che nel problema precedente, facendo muovere la sezione EF parallelamente ad essa stessa, in modo, che il punto m tocchi continuamente la curva GHK, la cui equazione è $z = \varphi y$.

502. Supponiamo ora che nell' equazione precedente, in vece di $X = 0$, si abbia una

funzione P di x e di y; l'equazione $\frac{dz}{dx} = P$, contenendo tre variabili, apparterrà ancora ad una superficie curva. Se tagliamo questa superficie con un piano paralello a quello delle xz, avremo una sezione, nella quale y sarà costante, e come in tutt' i suoi punti $\frac{dz}{dx}$ sarà eguale ad una funzione della variabile x, questa sezione sarà, come nel caso precedente, una curva. Integrata l'equazione $\frac{dz}{dx}=P$, avremo per equazione della superficie

$$z = \int P dx + \varphi y;$$

se in questa equazione diamo successivamente ad y i valori crescenti y', y'', y''', y^{iv} ec; e chè indichiamo con P', P'', P''', P^{iv} ec. ciocchè diviene in tal caso la funzione P, avremo l' equazioni

$$\left.\begin{array}{l} z=\int P'dx + \varphi y', z=\int P''dx + \varphi y'' \\ z=\int P'''dx+\varphi y''', z=\int P^{\text{iv}}dx+\varphi y^{\text{iv}}, \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots(201)$$

e si vede che quest' equazioni apparteranno a delle curve della stessa natura; ma differenti di forma, poichè i valori della costante y non sono in esse gli stessi: Queste non saranno altro, che le sezioni della superficie per mezzo di piani paralelli a quello delle xz, ed incontrando il piano delle yz, esse formeranno una curva, la cui equazione si otterrà col porre eguale a o il valore di x in quella della superficie. Chiamiamo $\int P dx$

ciocchè diviene Y; in questo caso avremo

$$z = Y + \varphi y \quad \ldots \quad (202);$$

e si vede che a causa di φy, la curva determinata da questa equazione, dee essere arbitraria; perciò, dopo di aver segnata a piacere (Fig. 49) la curva QRS sul piano delle yz, se rappresentiamo con RL la sezione, la cui equazione è $z = \int P'dx + \varphi y'$, si farà muovere questa sezione, tenendo il suo estremo R sempre applicato alla curva QRS, in modo però che in questo movimento questa sezione RL prenda le forme successive determinate dall' equazioni (201), e si costruirà la superficie, alla quale apparterrà l' equazione $\frac{dz}{dx} = P$.

Fig. 49

503. Consideriamo infine l' equazione generale

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = o,$$

il cui integrale è $U = \varphi V$ (art. 483.) Da che abbiamo $U = a$ e $V = b$, esistendo ciascuna di quest' equazioni tra tre coordinate, possiamo riguardarle come quelle di due superficie; e poicchè queste coordinate sono comuni, esse debbono appartenere alla curva d' intersezione delle due superficie. Ciò posto essendo a e b costanti arbitrarie, se in $U = a$ diamo ad x ed y i valori x', y', otterremo per z una funzione di x', di y' e di a, che determinerà un punto della superficie, la cui equazione è $U = a$. Questo qualunque siasi punto varierà di posizione, se

diamo successivamente diversi valori alla costante arbitraria a, il che equivale a dire, che facendo variare a, faremo passare la superficie, la cui equazione è $U = a$, per un nuovo sistema di punti. Ciocchè diciamo di $U = a$, potendo applicarsi a $V = b$, conchiudiamo, che la curva d'intersezione delle due superficie cambierà continuamente di posizione, e perciò descriverà una superficie curva, nella quale a e b potranno essere considerate come due coordinate; e poichè la relazione $a = \varphi b$, che liga tra loro queste due coordinate, è arbitraria, si vede che la determinazione della funzione φ equivale al problema di far passare una superficie per una curva descritta ad arbitrio.

504. Per mostrare come queste specie di problemi possono condurre a delle condizioni analitiche, esaminiamo qual' è la superficie, la cui equazione è

$$y\frac{dz}{dx} = x\frac{dz}{dy} \ldots (205).$$

Abbiamo veduto (art. 474) che questa equazione avea per integrale

$$z = \varphi(x^2 + y^2) \ldots (204);$$

reciprocamente da questo integrale si tira

$$x^2 + y^2 = \Phi z;$$

se la superficie si taglia con un piano parallelo a quello delle $x y$, la sezione avrà per equazione

$$x^2 + y^2 = \Phi c;$$

e rappresentando con a^2 la costante Φc; si avrà

$$x^2+y^2=a^2.$$

Questa equazione appartiene al cerchio; perciò la superficie avrà tale proprietà, che ogni sezione fatta per mezzo di un piano parallelo a quello delle xy, sarà un cerchio.

505. Questa proprietà è ancora indicata dall'equazione (203); poichè, in virtù dell' articolo 24 se ne tira

$$x=y\,\frac{dy}{dx}.$$

Questa equazione ci fa comprendere, che la sunnormale dee sempre essere eguale all' ascissa, ciocchè è una proprietà del cerchio.

506. L' equazione (204) non significando altro, se non che tutte le sezioni paralelle al piano delle xy sono cerchi, ne segue che la legge, secondo la quale i raggi di queste sezioni debbono crescere, non è compresa nell'equazione (204), e che perciò ogni superficie di rivoluzione soddisferà al problema, poichè si sa che in queste sorti di superficie, le sezioni paralelle al piano delle xy sono sempre cerchi, e non è necessario di dire, che le generatrice, la quale in una rivoluzione descriva la superficie, può essere una curva discontinua, discontigua, regolare o irregolare.

Fig. 50 507. Cerchiamo dunque la superficie, per la quale questa generatrice sarebbe una parabola AN (Fig. 50), e supponiamo, che in questa ipotesi, la superficie fosse tagliata da un piano AB, che passasse per l' asse delle z; la traccia di questo piano sopra quello

delle xy sarà una retta AL, che, condotta per l'origine avrà per equazione $y=ax$; se rappresentiamo con t l'ipotenusa AQ del triangolo rettangolo APQ costruito sul piano delle xy, avremo

Fig. 501

$$t^2=x^2+y^2;$$

ma essendo t l'ascissa AQ della parabola AN, di cui $QM=z$ è l'ordinata, per la natura di questa curva avremo

$$t^2=bz;$$

sostituendo a t^2 il suo valore x^2+y^2, si avrà

$$z=\frac{1}{b}(y^2+x^2),\ \text{o}\ z=\frac{1}{b}(a^2x^2+x^2)$$

$$=\frac{1}{b}x^2(a^2+1);$$

e facendo $\frac{1}{b}(a^2+1)=m$, avremo

$$z=mx^2;$$

di sortachè la condizione prescritta nell' ipotesi; in cui la generatrice è una parabola, che debba aversi

$$z=mx^2,\ \text{quando è}\ y=ax.$$

508. Cerchiamo ora di determinare per mezzo di queste condizioni, la funzione arbitraria, ch'entra nell' equazione (204). A tal oggetto rappresenteremo con U la quantità x^2+y^2 preceduta dal segno φ, l'equazione (204) diverrà

$$z=\varphi U \ldots (205)$$

ed avremo le tre equazioni

$$x^2+y^2=U\,,\ y=ax\,,\ z=mx^2\,;$$

Elimineremo y per mezzo delle due prime, ed avremo il valore di x^2, che sostituito nella terza ci darà

$$z=m\frac{U}{a^2+1},$$

equazione che riducesi a

$$z=\frac{1}{b}U\,;$$

perchè abbiamo supposto $\frac{1}{b}(a^2+1)=m$; questo valore di z sostituito nell' equazione (205), la cambierà in

$$\varphi U=\frac{1}{b}U\,;$$

sostitnendo il valore di U in questa equazione, troveremo

$$\varphi(x^2+y^2)=\frac{1}{b}(x^2+y^2)\,;$$

e si vede che la funzione è determinata; sostituendo questo valore di $\varphi(x^2+y^2)$ nell' equazione (204), l' integrale cercato sarà

$$z=\frac{1}{b}(x^2+y^2)\,;$$

equazione, che gode della proprietà richiesta, poichè l' ipotesi di $y = ax$ ci da

$$z = mx^2.$$

509. Questo metodo è generale; poicchè supponiamo che le condizioni, le quali debbono determinare la costante arbitraria siano che l' integrale sia $F(x, y, z) = 0$, allorchè si ha $f(x, y, z) = 0$; noi ci proccureremo una terza equazione, eguagliando a U la quantità preceduta da φ; ed allora eliminando successivamente due delle variabili x, y, z, ciascuna di queste variabili si avrà in funzione di U; sostituendo questi valori nell' integrale, si giungerà ad una equazione, il cui primo membro sarà φU, el secondo un' espressione composta di U; rimettendo il valore di U in funzioni delle variabili, la funzione arbitraria si troverà determinata.

Delle funzioni arbitrarie, ch' entrano negl' integrali dell' equazioni differenziali parziali di second' ordine.

510. L' equazioni differenziali parziali di second' ordine conducono a degl' integrali, che racchiudono due funzioni arbitrarie: la determinazione di queste funzioni importa il far passare la superficie per due curve che possono essere discontinue, e discontigue. Per darne un esempio, prendiamo l' equazione $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$: si è veduto (art. 488), che l' integrale di questa equazione era

$$z = x\varphi y + \psi y \ldots (206)$$

Fig. 51 Siano Ax, Ay, ed Az gli assi coordinati; se si mena un piano KL parallelamente a quello delle xz, la sezione della superficie fatta da questo piano sarà una retta, poichè essendo y eguale ad Ap per tutt' i punti di questa sezione, se rappresentiamo Ap con una costante c, le quantità φy e ψy diverranno φc, $c\psi$, e perciò potranno essere rimpiazzate da due costanti a e b, di sorta che l'equazione (206) diverrà

$$z = a x + b \ldots (207);$$

e sarà quella della sezione fatta dal piano KL.

511. Per conoscere il punto, in cui questa sezione incontra il piano delle yz, facciamo $x = 0$; in questa ipotesi l'equazione (206) ci dà $z = \psi y$; ciocchè c' indica una curva amb segnata sul piano delle yz. Ci sarebbe facile di dimostrare, come nell' art. 498, che la sezione incontra la curva amb in un punto m; e come questa è una retta, per determinarne la posizione, non si tratta, che di trovare un secondo punto, pel quale questa linea passa. A tal oggetto osserviamo che, quando è $x = 0$, l'equazione (206) riducesi a

$$z = \psi y;$$

mentre, che quando è $x = 1$ la stessa equazione riducesi a

$$z = \varphi y + \psi y;$$

facendo, come precedentemente $y = Ap = c$, questi due valori di z diverranno

$$z = b, \quad z = a + b,$$

è determinano due punti m, ed r presi sulla stessa sezione mr, che abbiamo veduto essere una retta. Per costruire questi punti, si farà nel seguente modo: si segnerà arbitrariamente sul piano delle yz la curva amb, e pel punto p, ove il piano segante KL incontra l'asse delle y, si eleverà la perpendicolare $pm = b$, che sarà un'ordinata alla curva; in seguito sull'intersezione HL del piano segante, e di quello delle xy si prenderà la parte pp' eguale all'unità e pel punto p' si menerà un piano paralello a quello delle yz, ed in questo piano si costruirà la curva $a'm'b'$ sul modello dell'altra amb, in modo che sia situata similmente; allora l'ordinata $m'p'$ sarà eguale ad mp, e se si prolunga $m'p'$ per una quantità arbitraria $m'r$, che rappresenterà a; si determinerà il punto r della sezione.

In seguito, se collo stesso metodo si prolunghino tutte le ordinate della curva $a'm'b'$ si costruirà una nuova curva $a'rb'$, la quale sarà tale; che menando per esse, e per amb, un piano paralello a quello delle xz, i due punti, ne' quali le curve saranno incontrate, apparterranno alla stessa sezione della superficie.

512. Da ciocchè precede segue, che la superficie può essere costruita, facendo muovere la retta mr di maniera, ch' essa tocchi continuamente le due curve amb, $a'rb'$.

513. Questo esempio basta per mostrare come la determinazione delle funzioni arbitrarie, le quali rendono compiuti gl' integrali dell' e-

quazioni differenziali parziali di second' ordine importa a far passare la superficie per due curve, che possono essere discontinue; discontigue, regolari, o irregolari, egualmente che le funzioni arbitrarie, che servono a costruirle.

FINE.

NOTE

NOTA PRIMA

(Pag. 40. §. 59 calcolo differenziale)

Sul modo di trovare lo sviluppo del logaritmo di $x + h$.

Ecco uno de' metodi impiegati per trovare il logaritmo di $x + h$. Primieramente si cercherà lo sviluppo di $\log(1 + x)$ nel seguente modo: si porrà $\log(1 + h)$ eguale ad una serie di termini ordinati, secondo le potenze di x, osservando preliminarmente, che in questa serie non può esservi un termine indipendente da x. Infatti, se si avesse

$$\log(1 + x) = A + Bx + Cx^2 + \text{ecc.},$$

dovendo questa equazione aver luogo, qualunque sia x, ne risulterebbe, che facendo $x = 0$, si troverebbe $A = \log 1 = 0$; perciò scriveremo

$$\log(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.} \ldots (1);$$

cambiando x in z, similmente si avrà

$$\log(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ec};$$

essendo z arbitraria potremo supporre che vi sia tra x e z la relazione

$$(1 + x)^2, \text{ o } 1 + 2x + x^2 = 1 + z;$$

tirando da questa equazione il valore di z, e sostituendolo nell'equazione (1), troveremo

$$\log(1+x)^2 = A(2x+x^2) + B(2x+x^2)^2 + C(2x+x^2)^3 + \text{ec},$$

o, sviluppando ed ordinando per riguardo ad x,

$$\log(1+x)^2 = 2Ax + (A+4B)x^2 + (4B+8C)x^3 + (B+12C+16D)x^4 + \text{ec.} \ldots (2).$$

D' altronde essendo la proprietà de' logaritmi espressa in questa equazione $\log a^n = n \log a$, abbiamo

$$\log(1+x)^2 = 2\log(1+x),$$

o, sostituendo ad $(1+x)$ il suo sviluppo (1),

$$\log(1+x)^2 = 2(Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec});$$

sostituendo questo valore di $\log(1+x)^2$ nel primo membro dell' equazione (2), avremo un' equazione, che avrà luogo, qualunque sia x; perciò eguagliando tra loro i termini affetti dalle stesse potenze di x, avremo

$$2A = 2A, \; A+4B = 2B, \; 4B+8C = 2C \text{ ec},$$

dalla quale se ne deduce

$$B = -\frac{A}{2}, \; C = -\frac{2B}{3} = \frac{A}{3} \text{ ecc};$$

sostituendo questi valori, troveremo

$$\log(1+x) = A\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \text{ecc}\right) + C.$$

Quando è $x=0$, l' equazione precedente da $\log 1 = 0 + C$, cioè $0 = 0 + C$; dunque non vi è alcuna costante da aggiugnervi; facciamo $x = \frac{h}{x}$, avremo

$$\log\left(1+\frac{h}{x}\right),\ \text{o}\ \log\left(\frac{x+h}{x}\right),\ \text{o}\ \log(x+h)$$

$$-\log x = A\left(\frac{h}{x}+\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+\text{ecc.}\right);$$

e dividendo per h

$$\frac{\log(x+h-\log x}{h} = A\left(\frac{1}{x}+\frac{h}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+\text{ec}\right)$$

Passando al limite, troveremo $\frac{d\log x}{dx} = \frac{A}{x}$; perciò il differenziale di $\log x$ sarà $A\frac{dx}{x}$; si vede che la costante A non è che il modulo.

Nota Seconda

(Pag. 186, §. 245 calcolo differenziale)

Sul principio fondamentale del metodo de' coefficienti indeterminati.

Nel seguente modo può dimostrarsi, che quando un' equazione, come per esempio
$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0 \ldots (3)$$
ha luogo, qualunque sia x, bisogna necessariamente che ciascuno de' coefficienti A, B, C, D, E, sia nullo; infatti poichè x può avere un qualunque valore, facciamo $x=0$, e l'equazione (3) si ridurrà ad $E=0$, e come E è indipendente di x; E è dunque ancora nullo; an-

che quando x non è zero; d'onde segue che l'equazione (3) riducesi ad

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx = 0;$$

sopprimendo il fattore comune, x, resterà

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0;$$

applicando a questa equazione lo stesso ragionamento, di cui ci siamo serviti per l'equazione (3), dimostreremo che D è nullo; e continuando così, troveremo successivamente, che gli altri coefficienti lo sono ancora

Nota Terza

(Pag. 90, §. 333 calcolo integrale)

Sullo sviluppo delle potenze de' coseni, e de' seni in funzione degli archi moltiplici.

Esiste una formola elegantissima, che dà il valore di una potenza di un coseno in funzione delle quantità $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ec, ed una formola analoga ha benanche luogo per gli seni: importa di farla conoscere; ma prima di occuparci di questo oggetto, cominceremo per dare la dimostrazione di una formola imaginaria rimarchevole, della quale anderemo immediatamente a servirci.

Sia dunque l' espressione $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi$, ch' è il prodotto de' due fattori $\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}$, e $\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}$: se facciamo . . . . . . $\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1} = \Gamma\varphi$, avremo differenziando

$$\frac{dF\varphi}{d\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi\sqrt{-1}:$$

questa equazione moltiplicata per $-\sqrt{-1}$, diviene

$$-\frac{dF\varphi}{d\varphi}\sqrt{-1} = \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1} + \cos\varphi;$$

e poichè per ipotesi il suo secondo membro è eguale a $F\varphi$, avremo

$$-\frac{dF\varphi}{d\varphi}\sqrt{-1} = F\varphi,$$

da cui si tira

$$\frac{dF\varphi}{F\varphi} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

$$= d\varphi\sqrt{-1};$$

ed integrando si trova

$$\log F\varphi = \varphi\sqrt{-1} = (\varphi\sqrt{-1})\log e = \log e^{\varphi\sqrt{-1}};$$

passando a' numeri si ha

$$F\varphi = e^{\varphi\sqrt{-1}};$$

e mettendo per $F\varphi$ il suo valore, si ha

$$\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1} = e^{\varphi\sqrt{-1}} \ldots (4).$$

Questa equazione avendo luogo, qualunque sia φ, potrà cambiarsi φ in $m\varphi$, e si avrà ancora

$$\cos m\varphi + \operatorname{sen} m\varphi \sqrt{-1} = e^{m\varphi\sqrt{-1}}$$

Questa potenza imaginaria di e ha un' altra espressione, poicchè l' equazione (4) elevata alla potenza m ci da

$$(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})^m = e^{(\varphi\sqrt{-1})m} = e^{m\varphi\sqrt{-1}}:$$

essendo identici i due secondi membri delle due ultime equazioni, si ha, eguagliando i primi,

$$(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})^m$$

$$= \cos m\varphi + \operatorname{sen} m\varphi\sqrt{-1} \;\ldots\; (5);$$

se si fa $\varphi = -\varphi$ nell' equazioni (4, e 5), queste diverranno

$$\cos -\varphi + \operatorname{sen} -\varphi\sqrt{-1} = e^{-\varphi\sqrt{-1}} \;\ldots\; (6).$$

$$(\cos -\varphi + \operatorname{sen} -\varphi\sqrt{-1})^m$$

$$= \cos - m\varphi + \operatorname{sen} - m\varphi\sqrt{-1} \;\ldots\; (7),$$

Or se φ rappresenta l' arco AD (Fig. 22), $-\varphi$ rappresenterà AD'; e come questi archi hanno gli stessi coseni, e gli stessi seni ma di segno contrario, si avrà

$$\cos -\varphi = \cos\varphi, \quad \operatorname{sen} -\varphi = -\operatorname{sen}\varphi;$$

si dimostrerebbe ancora che è

$$\cos -m\varphi = \cos m\varphi, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} -m\varphi = -\operatorname{sen} m\varphi;$$

sicchè sostituendo questi valori nell' equazioni (6), e (7), si otterrà

$$\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1} = e^{-\varphi\sqrt{-1}} \quad . \; . \; . \; (8)$$

$$(\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})^m$$

$$= \cos m\varphi + \operatorname{sen} m\varphi\sqrt{-1} \quad . \; . \; . \; (9).$$

Cerchiamo ora lo sviluppo di $\cos^m x$ in funzione degli archi moltiplici di x, e senza impiegare le potenze de' seni e de' coseni. A tale oggetto siano

$$\cos x + \operatorname{sen} x\sqrt{-1} = u \quad . \; . \; . \; (10)$$

$$\cos x - \operatorname{sen} x\sqrt{-1} = v \quad . \; . \; . \; (11);$$

quest' equazioni sommate danno

$$\cos x = \frac{1}{2}(u + v);$$

e perciò

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}(u + v)^m, \quad \cos^m x = \frac{1}{2^m}(v + u)^m;$$

sviluppando questi binomii per mezzo della formola usata, si ottiene

$$\cos^m x =$$

$$\frac{1}{2^m}\left[u^m + mu^{m-1}v + m\frac{(m-1)}{2}u^{m-2}v^2 + \text{ecc}\right]$$

$$\cos^m x$$

$$= \frac{1}{2^m}\left[v^m + mv^{m-1}u + m\frac{(m-1)}{2}v^{m-2}u^2 + \text{ecc}\right];$$

sommando quest' equazioni si trova

$$2^{m+1}\cos^m x = u^m + v^m + muv(u^{m-2} + v^{m-2})$$

$$+ m\frac{(m-1)}{2}u^2v^2(u^{m-4} + v^{m-4}) + \text{ecc} \; . \; . \; . \; (12)$$

Dalle formole (10), e (11) si ha

$$u^m = (\cos x + \text{sen}\, x\sqrt{-1})^m,$$

$$v^m = (\cos x - \text{sen}\, x\sqrt{-1})^m\,;$$

sostituendo ne' secondi membri di quest' equazioni i loro valori dati dalle formole (5), e (9), si ha

$$u^m = \cos mx + \text{sen}\, mx\sqrt{-1}$$

$$v^m = \cos mx - \text{sen}\, mx\sqrt{-1} \; . \; . \; . \; (13)\,;$$

sicchè sarà

$$u^m + v^m = 2\cos mx\,,$$

$$\text{ed } u^m v^m = \cos^2 mx + \text{sen}^2 mx = 1\,;$$

e perciò $uv = 1$

$$u^{m-2} + v^{m-2} = 2\cos(m-2)x, \quad u^{m-2}v^{m-2} = 1$$

$$u^{m-4} + v^{m-4} = 2\cos(m-4)x, \; u^{m-4}v^{m-4} = 1$$

ecc. ecc. ecc.

sostituendo questi valori nell' equazione (12), si troverà

$$\cos^m x =$$

$$\frac{1}{2^{m+1}}\Big[2\cos mx + 2m\cos(m-2)x +$$

$$2m\frac{(m-1)}{1.\ 2}\cos(m-4)x + \text{ecc}\Big] \; . \; . \; . \; (14).$$

Questo sviluppo provenendo da quello di ... $(a+b)^m$, contiene $m+1$ termini; se si fa successivamente $m=2$, $m=3$, $m=4$, ecc., e che i coseni di archi negativi si cambiino in positivi in virtù dell' equazione $\cos-\varphi = \cos\varphi$, si formerà il seguente quadro

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos 3x}{4}$$

$$\cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Questi calcoli possono essere abbreviati, poichè i termini egualmente distanti dagli estremi della serie sono eguali. Per dimostrarlo, osserveremo che i coseni ch' entrano nell' equazione (14) essendo

$$\cos mx,\ \cos(m-2)x\ .\ \cos(m-4)x,$$
$$\cos(m-2.\ 3)x \text{ ecc.}$$

o piuttosto

$$\cos mx,\ \cos(m-2.1)x,\ \cos(m-2.\ 2)x,$$
$$\cos(m-2.\ 3)x, \text{ ecc.}$$

considerando i numeri, che seguono il segno in ogni termine della serie, si vede che uno di questi numeri indica quello de' termini precedenti. Perciò il termine, che ne ha n prima di lui, sarà affetto da $\cos(m-2n)x$. Per riguardo al termine che ne ha n dopo lui

come tutto il numero de' termini della serie è $m+1$, quello che ne ha n dopo lui terrà il rango $m+1-n$, e perciò avrà $m-n$ termini avanti di lui; perciò esso racchiuderà l'espressione

$$\cos[m-2(m-n)]x = \cos(-m+2n)x;$$

e come abbiamo veduto che si potea cambiare il segno dell'arco, il cui coseno è dato, si avrà

$$\cos(-m+2n)x = \cos(m-2n)x;$$

sicchè i termini egualmente distanti dagli estremi della serie hanno gli stessi coseni; e come essi hanno ancora gli stessi coefficienti (*), poicchè questi sono quelli della formola del binomio, ne risulta che questi termini sono eguali. Perciò allorchè m è impari, il numero $m+1$ de' termini della serie sarà pari, e basterà di raddoppiare li $\frac{(m-1)}{2}$ primi termini, per avere tutt' i termini della serie; se m è pari, $m+1$ sarà dispari; allora si unirà al termine di mezzo il doppio di quelli che lo precederanno. Questo termine occuperà il rango $\frac{m}{2}+1$ nella serie, e perciò sarà affetto da $\cos(m-m) = \cos 0 = 1$; sicchè non conterrà affatto coseno.

(*) *Ciò può conoscersi paragonando lo sviluppo di* $(a+b)^m$ *a quello di* $(b+a)^m$

Con un metodo analogo si può trovare lo sviluppo di $\operatorname{sen}^m x$. A tale oggetto togliendo l'equazione (11) dall' altra (10), si trova $2\operatorname{sen} x\sqrt{-1} = u - v$; dunque sarà

$$\operatorname{sen} x = \frac{u - v}{2\sqrt{-1}}$$

elevando i due membri di questa equazione alla potenza di m, si avrà

$$\operatorname{sen}^m x = \frac{1}{(2 - 1)^m}(u - v)^m;$$

se m è eguale ad un numero pari $2p$ si ha $(u - v)^{2p} = [(u - v)^2]^p = [(v - u)^2]^p = (v - u)^{2p}$, dunque sarà

$$(u - v)^m = (v - u)^m,$$

Si svilupperanno l'equazioni

$$\operatorname{sen}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(v - u)^m,$$

e

$$\operatorname{sen}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(v - u)^m;$$

ed operando come l'abbiamo fatto quì sopra si troverà

$$\operatorname{sen}^m x =$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[\cos mx - m\cos(m-2)x$$

$$+ m\frac{(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + ecc \Big];$$

la quantità imaginaria $(2\sqrt{-1})^m$ scomparirà dal risultamento; poichè è elevata ad una potenza pari.

Se m è eguale ad un numero dispari $2p+1$, si avrà

$$(u-v)^{2p+1} = (u-v)^{2p}.(u-v)$$
$$= (v-u)^{2p}.-(v-u) = -(v-u)^{2p+1};$$

perciò sarà

$$(u-v)^m = -(v-u)^m,$$

e

$$\operatorname{sen}^m x = \frac{(u-v)^m}{(2\sqrt{-1})^m}$$

$$\operatorname{sen}^m x = -\frac{(v-u)^m}{(2\sqrt{-1})^m} \ldots (15):$$

sviluppando $(u-v)^m$, e $(v-u)^m$ per mezzo della formola del binomio, e sostituendo questi sviluppi nell' equazioni (15), che si sommeranno, si avrà

$$2\operatorname{sen}^m x =$$
$$\frac{1}{\sqrt{(1.2-1)^m}}\Big[u^m - v^m$$
$$-\frac{m}{1}uv(uv^{m-2} - v^{m-2}) + ecc\Big] \ldots (16),$$

sottraendo l' equazioni (15) l' una dall' altra,

moltiplicando in seguito tra loro queste stesse equazioni, ed osservando che la seconda operazione ci da la somma de' quadrati di $\operatorname{sen} mx$, e di $\cos mx$, che equivale all' unità, si troverà

$$u^m - v^m = 2\operatorname{sen} mx\sqrt{-1}, \quad u^m v^m = 1.$$

Operando nello stesso modo come qui sopra, si cambierà l'equazione (16) in

$$\operatorname{sen}^m x = \frac{1}{2(2\sqrt{-1})^{m-1}}\Big[\operatorname{sen} mx - \frac{m}{1}\operatorname{sen}(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{sen}(m-4)x + \text{ecc.}\Big]$$

Come in questa ipotesi m è impari, la potenza $m-1$, alla quale è elevata la quantità $2\sqrt{-1}$, è pari, il che fa svanire la quantità imaginaria $\sqrt{-1}$.

NOTA QUARTA

(Pag. 130 §. 376 calcolo integrale)

Sulla maniera di determinare i volumi de' corpi la cui superficie può essere espressa da una funzione di una stessa variabile

Quando i solidi non sono di rivoluzione, si può qualche volta determinare il volume per mezzo di una semplice integrazione, sen-

za fare uso della formola (85) pag. 128 del calcolo integrale. Questo è ciocchè anderemo a fare riguardo alla piramide ABCD (Fig. 25). A tale oggetto concepiamo una sezione GFE parallella alla base DBC e dal vertice A abbassiamo una perpendicolare AH sulla base DBC: chiamiamo x ed h le parti AI, IH di questa perpendicolare, compresa tra il punto A, ed i piani DCB, GEF: la superficie del triangolo GFE, diminuendo o aumentando, secondo il valore che si da ad x, è una funzione di x: dunque si ha

$$GEF = fx, \quad DBC = f(x + h).$$

Il volume della piramide AGFE essendo ancora una funzione di x, potremo supporre

$$\text{vol. } AGEF = \varphi x, \quad \text{vol. } ABBC = \varphi\,(x + h).$$

Or egli è evidente, che la piramide troncata GB, la quale è la differenza di questi volumi, sarà minore del volume della prima, che ha BCD per base, ed h per altezza, e sorpasserà il volume del prisma, che ha EFG per base, ed h per altezza. Il rapporto di questi primi è

$$\frac{f(x+h)h}{fx.h} = \frac{f(x+h)}{fx};$$

nel caso del limite, divenendo questo rapporto eguale all' unità, a più forte ragione sarà eguale all' unità il rapporto, ch' esiste fra il tronco della piramide GB, ed uno di questi prismi. Or essendo il volume del tronco

piramide rappresentato da $\varphi(x+h)-\varphi x$, il rapporto di questo volume a quello del prisma, la cui base è GFE, ed h l'altezza, sarà

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi x}{fx.h}=\frac{\frac{d\varphi x}{dx}+\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{h}{2}+\text{ecc.}}{fx}$$

passando al limite, avremo

$$\frac{d\varphi x}{fx.dx}=1\text{; e } d\varphi x=fxdx \ldots (17).$$

Col metodo degl' infinitamente piccoli si sarebbe giunto allo stesso risultamento, poichè, concependo la piramide come composta da una infinità di strati paralelli alla sua base, ogni strato potrebbe esser considerato come un prisma; la cui base sarebbe fx, e dx l' altezza; dunque $fx.dx$ è elemento della piramide.

Ora per determinare il volume della piramide, siano B la superficie della sua base DBC, ed A la sua altezza, avremo

$$B:fx=A^2:x^2;$$

dunque sarà

$$fx=\frac{Bx^2}{A^2}$$

sostituendo questo valore nell'equazione (17), si troverà

$$d\varphi x=\frac{Bx^2}{A^2}dx;$$

ed integrando

$$\varphi x = \frac{Bx^3}{3^r A}.$$

Il volume AGEF rappresentato da φx divenendo zero, quando è $x = 0$, non vi è alcuna costante da aggiungervi; se in seguito si fa $x = A$, si avrà per l'integrale definito l'espressione $\frac{BA}{3}$, ch'è quella del volume della piramide ACBD.

In generale, se la sezione GFE, invece di essere un triangolo, è una superficie qualunque, purchè questa sia una funzione di x, si dimostrerà, come l'abbiamo fatto per la piramide, che l'elemento del solido ha per espressione $\int x dx$.

NOTA QUINTA

(Pag. 131, calcolo integrale §. 377)

Sulla projezione di una superficie piana.

Per dimostrare che la projezione di una superficie piana sopra un piano, è eguale al prodotto della stessa superficie pel coseno della sua inclinazione, chiamiamo γ l'angolo di projezione, che una superficie A fa con un altra B; la superficie A essendo inclinata sull'altra, la incontrerà necessariamente; situiamo l'asse delle x alla loro comune sezione, e supponiamo che le ordinate y della superficie B siano perpendicolari a quest' asse, egli

è certo che ogni ordinata y di questa superficie avrà $y\cos\gamma$ per projezione sull' altra: perciò essendo l' elemento della superficie A rappresentato da ydx (art. 349), quello della superficie B lo sarà da $y\cos\gamma dx$, prendendo gl' integrali avremo

$$A = \int ydx, \quad B = \int y\cos\gamma dx = \cos\gamma \int ydx;$$

eliminando $\int ydx$ tra queste equazioni, troveremo

$$B = A\cos\gamma.$$

NOTA SESTA

(Pag. 131, calcolo integrale §. 377)

Sopra l' espressione del coseno dell' angolo formato da due piani, determinata direttamente con nuovo metodo

Proponiamoci di sciogliere direttamente questo problema, Trovare il coseno dell' inclinazione di due piani. Siano DB, DC, CD (Fig. 52) le tracce di un piano DBC sui piani coordinati, i cui assi rettangolari sono diretti secondo le rette AB, AC, AD; chiamiamo AB, a; AC, b; AD, c, e rappresentiamo con α, β, γ gli angoli, che il piano DBC forma co' piani delle yz delle xz, e delle xy rispettivamente, le projezioni della superficie BCD sopra questi piani, essendo $\frac{bc}{2}$, $\frac{ac}{2}$, $\frac{ab}{2}$, avremo, dietro la precedente nota,

$$\mathrm{DBC}\cos\gamma = \frac{ab}{2},\ \mathrm{DBC}\cos\alpha = \frac{bc}{2},$$

$$\mathrm{DBC}\cos\beta = \frac{ac}{2}\ \ldots\ (18);$$

elevando a quadrato ciascheduna di quest' equazioni, se ne prenda la somma, e quella de' quadrati de' coseni si rimpiazzi coll' unità, si otterrà, dopo l' estrazione della radice quadrata

$$\mathrm{DBC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2};$$

sostituendo questo valore nella prima dell' equazioni (18), se ne dedurrà

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}}\ \ldots\ (19).$$

Sia ora $Ax + By + Cz + D = 0$ l' equazione del piano DBC, se si fa $y = 0$, si avrà $Ax + Cz + D = 0$; questa ci dà

$$z = -\frac{Ax}{C} - \frac{D}{C}.$$

Come si sa che nell' equazione della linea retta posta sotto di questa forma, il coefficiente di x rappresenta la tangente trigonometrica dell' angolo formato dalla retta coll' asse delle x, avremo

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{DBA} = -\frac{A}{C};$$

ma il triangolo rettangolo DBA ci da

$$\tang DBA = \frac{c}{a};$$

paragonando questi due valori, si avrà

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{A^2}{C^2};$$

facendo in seguito $x = 0$ nell' equazione del piano, per aver quella della sua traccia sul piano delle xy, si trova benanche

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{B^2}{C^2}$$

sostituendo questi valori nell' equazione (19), si ha

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2}}}.$$

Ora se l' equazione del piano si divida per C, e che successivamente essa si differenzii per rispetto alle variabili x ed y, si troverà

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{C};\ \frac{dz}{dy} = -\frac{B}{C};$$

sostituendo questi valori in quello di $\cos\gamma$, si avrà infine

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

Nota Settima

(Pag. 175, calcolo integrale §. 427)

Sulla curva a doppia curvatura, che può essere costruita per mezzo di due equazioni tra tre variabili.

È facile dimostrare che l' equazioni (122 pag. 175 del calcolo integrale) appartengono ad una curva a doppia curvatura. A tale oggetto cambiamo le y in z, e le z in y, affin di situare gli assi coordinati in una posizione più vantaggiosa per la nostra dimostrazione, avremo l' equazioni

$$z^2 + 2xy + y^2 = 0 \quad \ldots \quad (20)$$

$$2x + 3y^2 - z = 0 \quad \ldots \quad (21).$$

Se la prima fosse sola, si potrebbe per mezzo suo costruire una superficie curva. Infatti se per tutt' i punti del piano delle xy, che supporremo al solito orizontale, eleviamo delle perpendicolari, i valori ne saranno determinati per mezzo dell' equazione (20); e si vede che l' estremità di queste ordinate z formeranno una superficie curva. Quando alcune di queste ordinate sono imaginarie, è un indizio, che la superficie non si estende verso quella parte, ove esistono tali ordinate imaginarie.

Se abbiamo ora riguardo all' equazione (21), stabiliamo con ciò tra x ed y una relazione,

che assoggetta i piedi delle ordinate z ad esser sulla curva, che appartiene all' equazione (21); e si vede che in questo caso l' estremità delle ordinate z non formano più una superficie, ma una curva. Il sistema di queste coordinate z costituisce allora una superficie cilindrica, la cui integrazione col piano delle xy è data dall' equazione (21). L' intersezione di questa superficie con quella, che determina l' equazione (21) è precisamente la curva, di cui abbiamo parlato, ed egli è evidente, che questa curva è a doppia curvatura, poichè si sa che l' intersazione di due superficie curve forma una curva a doppia curvatura.

NOTA OTTAVA

(Pag. 224, calcolo integrale §. 485)

Nuova dimostrazione concernente l' integrazione dell' equazioni differenziali parziali.

Si è veduto nell' art 485, che se integrando l' equazione

$$\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}+N=0 \quad \ldots (22),$$

nella quale M ed N sono funzioni di x di y e di z, si otterranno due integrali $U=a$, $V=b$, si ha necessariamente $a=\varphi b$. Essendo della massima importanza la dimostrazione di questo teorema, abbiamo cercato dargli l' ultimo grado di rigore nel seguente modo.

U, e V essendo funzioni di x, di y, e di z, le costanti a, e b possono essere considerate come funzioni di questa stessa variabile, in virtù dell'equazioni $U = a$, e $V = b$; perciò se quest'equazioni si differenziano, si avrà.

$$\left.\begin{array}{l} da = Xdx + Ydy + Zdz \\ db = X'dx + Y'dy + Z'dz \end{array}\right\} \ldots (23);$$

questi differenziali debbono essere nulli, essendo a e b costanti; perciò l'equazioni $da = o$, $db = o$ portano necessariamente a queste altre

$$\left.\begin{array}{l} Xdx + Ydy + Zdz = o \\ X'dx + Y'dy + Z'dz = o \end{array}\right\} \ldots (24).$$

Se in quest'equazioni divise per dx si sostituiscano i valori di dz, e di dy tirati dall'equazioni

$$dz + Ndx = o,\ dy - Mdx = o \ldots (25)$$

date nella pag. 247 del calcolo integrale (§. 475), si avrà

$$X + YM - ZN = o,\ X' + Y'M - Z'N = o;$$

da quest'equazioni si tirerà

$$M = \frac{ZX' - XZ'}{Z'Y - ZY'},\ N = \frac{X'Y - YX'}{Z'Y - Z'Y}$$

sostitnendo questi valori di M, e di N nell'equazione (22), si otterrà

$$\frac{dz}{dx} + \frac{ZX' - XZ'}{Z'Y - ZY'} \frac{dz}{dy}$$

$$+\frac{X'Y-Y'X}{Z'Y-ZY'}=0 \ldots (26)$$

i coefficienti $\frac{dz}{dx}$, e $\frac{dz}{dy}$ si deducono dall' equazioni (25), le quali danno

$$\frac{dz}{dx}=-N,\ \frac{dy}{dx}=M,\ \frac{dz}{dy}$$

$$=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{N}{M} \ldots (27)$$

sostituendo questi valori di $\frac{dz}{dx}$, e di $\frac{dz}{dy}$ nell' equazione (26), e facendo svanire il denominatore, si troverà

$$-(Z'Y-ZY')N-(ZX'-XZ')\frac{N}{M}$$

$$+X'Y-Y'X=0 \ldots (28);$$

le quantità X, Y, Z, ch'entrano in questa equazione non sono sempre note, poichè debbono aversi dalla differenziazione dell' equazione $U=a$ e $V=b$. Cerchiamo dunque di eliminare dal n.° risultamento X, Y, Z. A tale oggetto, riguardando z come una funzione di x e di y, avremo dall' equazioni (23)

$$\frac{da}{dx}=X+Z\frac{dz}{dx},\ \frac{db}{dx}=X'+Z'\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{da}{dy}=Y+Z\frac{dz}{dy},\ \frac{db}{dy}=Y'+Z'\frac{dz}{dy};$$

sostituendo in queste espressioni i valori di

$\frac{dz}{dx}$ e di $\frac{dz}{dy}$ dati dall' equazioni (27), e deducendone i valori di X, di Y, di X', di Y', troveremo

$$X = \frac{da}{dx} + ZN, \quad X' = \frac{db}{dx} + Z'N$$

$$Y = \frac{da}{dy} + \frac{ZN}{M}, \quad Y' = \frac{db}{dy} + \frac{Z'N}{M};$$

sostituendo questi valori di X, di Y, di X', di Y' nell' equazione (128), e riducendo, otterremo

$$\frac{da}{x} \cdot \frac{db}{dy} = \frac{da}{dy} \cdot \frac{db}{dx} \quad \ldots \quad (29).$$

Questa equazione ci fa comprendere, che a è funzione di b, ed infatti se abbiamo $a = Fb$, differenziando questa equazione, troveremo $da = \phi b db$, da cui tirasi

$$\frac{da}{dx} = \phi b \frac{db}{dx}, \quad \frac{da}{dy} = \phi b \frac{db}{dy},$$

eliminando ϕb, troveremo l' equazione (29).

NOTA ULTIMA

(Pag. 60 calcolo integrale)

Sulla integrazione delle funzioni razionali, che ne' loro denominatori posti eguali a zero, contengono radici imaginarie ed eguali.

L' integrazione delle funzioni razionali di

questa specie riduconsi a quella della formola $\frac{Mdz}{(\beta^2 + z^2)^p}$, come il modo, di cui ci siamo serviti per integrare questa espressione (pag. 60, calc. integrale) è un poco complicato, andiamo ad indicare un metodo meno diretto, ma ch' è in uso per giungere prontamente a questo scopo.

Si supporrà

$$\int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^p} = \frac{Hz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}}$$

$$+ K \int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}} \dots (30)$$

o ciocchè importa lo stesso

$$\int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^p} = Hz(\beta^2 + z^2)^{1-p} + K \int \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}};$$

differenziando si ha

$$\frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^p} = Hdz(\beta^2 + z^2)^{1-p}$$

$$+ H(1-p)(\beta^2 + z^2)^{-p} 2z^2dz + K \frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^{p-1}},$$

o

$$\frac{dz}{(\beta^2 + z^2)^p} = \frac{Hdz(\beta^2 + z^2)}{(\beta^2 + z^2)^p}$$

$$+ \frac{2H(1-p)z^2dz}{(\beta^2 + z^2)^p} + K \frac{(\beta^2 + z^2)dz}{(\beta^2 + z^2)^p},$$

sopprimendo i fattori comuni, si trova

$$1 = H(\beta^2 + z^2) + 2H(1-p)z^2 + K(\beta^2 + z^2);$$

eguagliando tra loro i coefficienti di z^2, e

quelli che ne sono indipendenti, si otterrà $a = H\beta^2 + K\beta^2$, $H + 2(1-p)H + K = 0$; questi valori danno

$$H = \frac{1}{2(p-1)\beta^2}, \quad K = \frac{2p-3}{2(p-1)\beta^2};$$

essendo noti H e K, se ne sostituirà il valore nell' equazione (30), e si avrà

$$\int \frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p} = \frac{1}{2(p-1)\beta^2} \frac{z}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}$$
$$+ \frac{(2p-3)}{2(p-1)\beta^2} \int \frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-1}} \ldots (31);$$

perciò l' integrale di $\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p}$ dipenderà da un altro, nel quale l' esponente della parentesi sarà minore di una unità. Se nella formola (31) si suppone in seguito $p = p-1$, si farà dipendere l' integrale di $\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}$ da quello di $\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^{p-2}}$, e diminuendo così successivamente l' esponente della parentesi di una unità; si giungerà finalmente a . . . $\int \frac{dz}{\beta^2+z^2}$, il cui integrale è . . . .

$$\frac{1}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right)$$

FINE DELLE NOTE

TAVOLA

DELLE MATERIE

CALCOLO INTEGRALE

NOTE.

FINE DELLA TAVOLA DELLE MATERIE.

A SUA ECCELLENZA REVERENDISS.

MONSIG. ROSINI VESCOVO DI POZZUOLI

PRESIDENTE DELLA REGIA UNIVERSITA' DEGLI STUDI
E DELLA GIUNTA DI PUBBLICA ISTRUZIONE.

ECCELLENZA

Lo stampatore Vincenzo Orsini desidera dare alle stampe gli *Elementi del Calcolo Differenziale ed Integrale di M.r Boucharlat*, tradotti in italiano. Prega V. E. Reverendiss. destinare il Revisore Regio, e l'avrà ecc.

PRESIDENZA DELLA GIUNTA

DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE.

A dì 23 *Dicembre* 1823.

Il Regio Revisore Signor D. Biagio Ruberti avrà a compiacenza di rivedere l' Opera soprascritta, e di osservare se vi sia cosa contro la Religione, ed i dritti della Sovranità.

Il Deputato per la revisione de' libri
Canonico Francesco Rossi.

ECCELLENZA REVERENDISSIMA

Sono di grandissima utilità pei studiosi delle Matematiche gli *Elementi di calcolo Differenziale*, *ed Integrale di M.r Boucharlat*, che tradotti nel nostro Idioma si vogliono dal signor Orsini rendere di pubblica ragione. Sono quelli scritti con precisione insieme, e con chiarezza. Niente v' è, che ai sagri dritti si opponga della Religione, e della Sovranità. Son di avviso, che possa permettersene la stampa.

Napoli 20 Febbrajo 1824.

Il Regio Revisore
Biagio Ruberti.

Napoli 31 Maggio 1825.

PRESIDENZA DELLA GIUNTA

PER LA PUBBLICA ISTRUZIONE,

Vista la dimanda dello Stampatore Vincenzo Orsini, con la quale chiede di voler stampare gli *Elementi del Calcolo differenziale ed integrale di M.r Boucharlat*.

Visto il favorevole parere del Regio Revisore Signor D. Biagio Ruberti;

Si permette che gl' indicati Elementi si stampino, però non si pubblichino senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all' originale approvato,

IL PRESIDENTE
M. COLANGELO.

Il Segr. Gener. membro della Giunta
L' Aggiunto
ANTONIO COPPOLA.

…, ed Integrale Tav. I.

Fig. 28.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 36.

Fig. 39.

Fig. 45.

Fig. 47.

Fig. 48.

Fig. 52.